Sumário

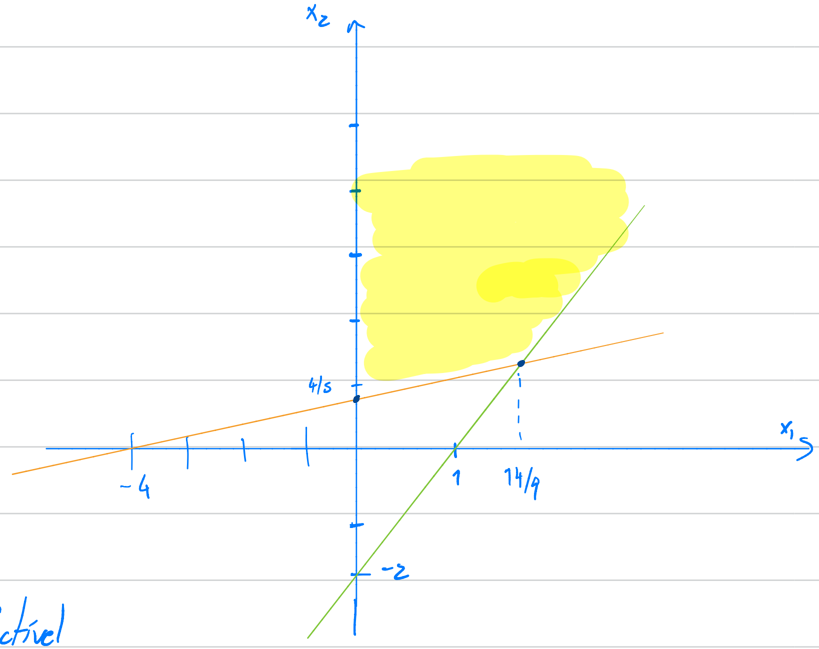
- Programa Linear Auxiliar
- Tópicos Adicionais
  - Múltiplas soluções ótimas
  - Soluções Degeneradas

Aula 19

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 2 \qquad \text{I} \\
& x_1 - 5x_2 \leq -4 \qquad \text{II} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



$\Downarrow$ Criamos um programa linear auxiliar para encontrar a solução factível

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -x_0 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_0 \leq 2 \\
& x_1 - 5x_2 - x_0 \leq -4 \\
& x_1, x_2, x_0 \geq 0
\end{aligned}
$$

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

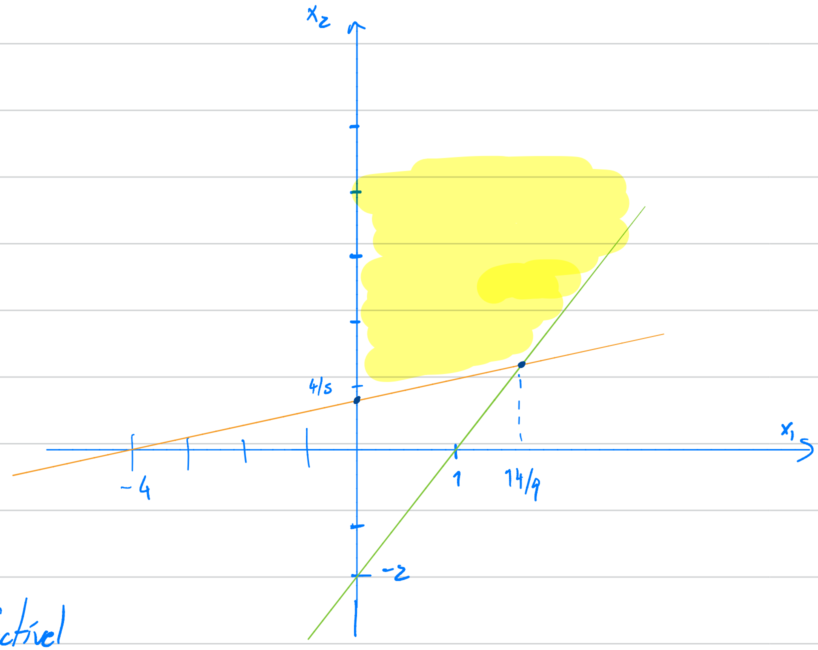
- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{I}$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$\Downarrow$

Criamos um programa linear auxiliar para encontrar a solução factível

$$\max \quad -x_0$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 - x_0 \leq 2$$

$$x_1 - 5x_2 - x_0 \leq -4$$

$$x_1, x_2, x_0 \geq 0$$

$(0, 0, 0)$ não é factível

Escolhemos a restrição mais negativa e fazemos uma operação de pivotagem

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \le 2 \quad \text{(I)} \\ & x_1 - 5x_2 \le -4 \quad \text{(II)} \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & -x_0 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_0 \le 2 \\ & x_1 - 5x_2 - x_0 \le -4 \\ & x_1, x_2, x_0 \ge 0 \end{aligned}$$

$(0, 0, 0)$ não é factível

(I)

$$\begin{aligned} z &= -x_0 \\ s_1 &= 2 - 2x_1 + x_2 + x_0 \\ s_2 &= -4 - x_1 + 5x_2 + x_0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

(II)

$$\begin{aligned} z &= -4 - x_1 + 5x_2 - s_2 \\ s_1 &= 6 - x_1 - 4x_2 + s_2 \qquad 4/4 = 1 \\ x_0 &= 4 + x_1 - 5x_2 + s_2 \qquad 4/5 < 1 \end{aligned}$$

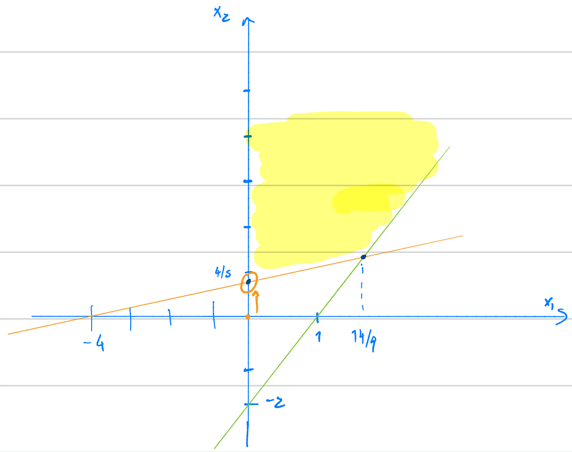
(III)

$$\begin{aligned} z &= 0 - x_0 \\ s_1 &= 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2 + 4/5\, x_0 \\ x_2 &= 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5\, s_2 - 1/5\, x_0 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, s_1, s_2, x_0)$

$\downarrow$

$(0, 4/5, 14/5, 0, 0)$



Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 2 && \text{I} \\ & x_1 - 5x_2 \leq -4 && \text{II} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 0 - x_0 \\ s_1 &= 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2 + 4/5\, x_0 \\ x_2 &= 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5\, s_2 - 1/5\, x_0 \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, x_0)$$
$$\downarrow$$
$$(0, 4/5, 14/5, 0, 0)$$

Resolver o programa linear original:

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - (4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2) \\ s_1 &= 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2 \\ x_2 &= 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2 \end{aligned}$$

Resolvendo a função objectivo

$$\begin{aligned} z &= -4/5 + 9/5\, x_1 - 1/5 \cdot s_2 \\ s_1 &= 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2 \\ x_2 &= 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 2 - s_1 \\ x_1 &= 14/9 + 1/9\, s_2 - 5/9\, s_1 \\ x_2 &= 10/9 + 10/45\, s_2 - 1/9\, s_1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Não conseguimos melhorar o valor da função objectivo

Todos os coeficientes são negativos

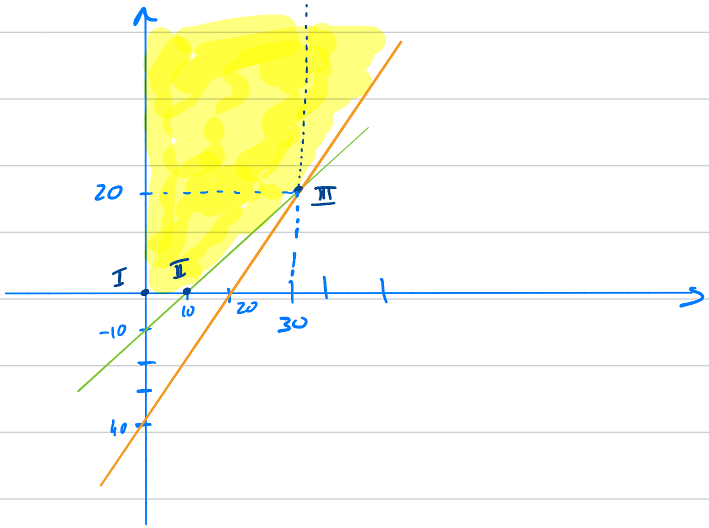
Algoritmo Simplex - Unboundedness

Exemplo: $\max \; 2x_1 + x_2$

$x_1 - x_2 \leq 10$ (1)

$2x_1 - x_2 \leq 40$ (2)

$x_1, x_2 \geq 0$ (3), (4)



(1) $x_1 - x_2 = 10 \Leftrightarrow x_2 = -10 + x_1$

$-10 + x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 10$

(2) $2x_1 - x_2 = 40 \Leftrightarrow x_2 = -40 + 2x_1$

$-40 + 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 20$

I

$z = 2x_1 + x_2$

$10/1 = 10$ $\quad s_1 = 10 - x_1 + x_2$

$0/2 = 20$ $\quad s_2 = 40 - 2x_1 + x_2$

II

$z = 20 + 3x_2 - 2s_1$

$x_1 = 10 + x_2 - s_1$

20 $\quad s_2 = 20 - x_2 + 2s_1$

III

$z = 80 + 4s_1 - 3s_2$

$x_1 = 30 + s_1 - s_2$

$x_2 = 20 + 2s_1 - s_2$

Todos os coeficientes são positivos

$\rightarrow$ $-s_1 + s_2 \leq 30$

$-2s_1 + s_2 \leq 20$

Algoritmo Simplex - Múltiplas Soluções Óptimas

Exemplo:

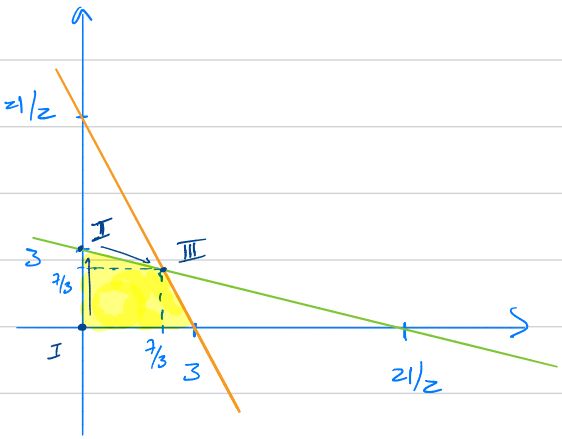
$$\max \; 4x_1 + 14x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21 \quad \text{(I)}$$

$$7x_1 + 2x_2 \leq 21 \quad \text{(II)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



(I)

$$z = 4x_1 + 14x_2$$

$$s_1 = 21 - 2x_1 - 7x_2 \qquad 21/7 = 3$$

$$s_2 = 21 - 7x_1 - 2x_2 \qquad 21/2 = 10.5$$

(II)

$$z = 42 - 2s_1$$

$$\frac{3}{2/7} = \frac{21}{2} \qquad x_2 = 3 - 2/7\,x_1 - 1/7\,s_1$$

$$\frac{15}{45/7} = 7/3 \qquad s_2 = 15 - 45/7\,x_1 + 2/7\,s_1$$

x_1 não aparece na função objectivo e é não básica $\Rightarrow$ Podemos incrementar x_1 sem prejudicar a função objectivo

(III)

$$z = 42 - 2s_1$$

$$x_2 = 7/3 - 7/45\,s_1 + 2/45\,s_2$$

$$x_1 = \frac{7}{3} + 2/45\,s_1 - 7/45\,s_2$$

Algoritmo Simplex - Soluções Degeneradas

Exemplo 1:

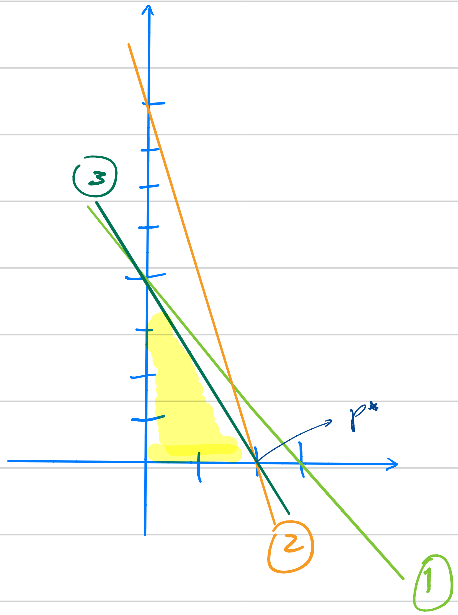
max $2x_1 + x_2$

s.t. $4x_1 + 3x_2 \le 12$ (1)

$4x_1 + x_2 \le 8$ (2)

$4x_1 + 2x_2 \le 8$ (3)

$x_1, x_2 \ge 0$ (4) e (5)



· Soluções Degeneradas

1. Soluções degeneradas ocorrem quando um dos vértices do poliedro corresponde à intersecção de um nº de hiperplanos superior à dimensionalidade do problema (e.g. P^*: (2), (3), (5))

2. Uma solução diz-se degenerada quando pelo menos uma das variáveis básicas assume o valor 0.

3. Soluções degeneradas podem causar um ciclo infinito no algoritmo simplex.

I

$z = 2x_1 + x_2$ (0,0)

$s_1 = 12 - 4x_1 - 3x_2$ — $12/4 = 3$

$s_2 = 8 - 4x_1 - x_2$ — $8/4 = 2$

$s_3 = 8 - 4x_1 - 2x_2$ — $8/4 = 2$

II

$z = 4 + 1/2\, x_2 - 1/2\, s_2$ (2,0)

$s_1 = 4 - 2x_2 + s_2$ — $4/2 = 2$

$x_1 = 2 - 1/4\, x_2 - 1/4\, s_2$ — $2/\tfrac{1}{4} = 8$

$s_3 = 0 - x_2 + s_2$ — $0/1 = 0$

(2), (5)

III

$z = 4 - 1/2\, s_3$ (2,0)

$s_1 = 4 - s_2 + 2s_3$

$x_1 = 2 - 1/2\, s_2 + 1/4\, s_3$

$x_2 = 0 + s_2 - s_3$

(2), (3)

IV

$z = 4 - 1/2\, s_3$

$s_1 = 4 + s_3 - x_2$

$x_1 = 2 - 1/4\, s_3 - 1/2\, x_2$

$s_2 = 0 + x_2 + s_3$

(3), (5)

Programação Linear - Revisitar a 1ª parte da cadeira

- Fluxo Máximo

$$\max \sum_{v \in V} f_{sv} - \sum_{v \in V} f_{vs}$$

$$f_{uv} \leq c(u,v) \quad \text{for each } u,v \in V$$

$$\sum_{v \in V} f_{vu} = \sum_{v \in V} f_{uv} \quad \text{for each } u \in V \setminus \{s,t\}$$

$$f_{uv} \geq 0, \quad \text{for each } u,v \in V$$

- Caminhos mais curtos entre s e t

$$\max \; d[t]$$

$$d[v] \leq d[u] + w(u,v) \quad \forall (u,v) \in E$$

$$d[s] = 0$$

$$d[v] \geq 0 \quad \forall v \in V$$