Sumário

- Programação Linear
    - Formulação de Programas Lineares
    - Interpretação Geométrica
    - Forma Standard e Forma Slack
- Algoritmo Simplex

Aula 18

Programação Linear - Exemplo

- A fábrica de chocolates FooBar produz chocolates de dois tipos:
  - A - c/ lucro de 1 $ por caixa
  - B - c/ lucro de 6 $ por caixa
- A procura de cada tipo de caixas está limitada:
  - A - 200
  - B - 300
- A fábrica consegue produzir um máximo de 400 caixas por dia.

Pergunta: Qual é o lucro máximo q a fábrica pode fazer?

Programação Linear - Exemplo

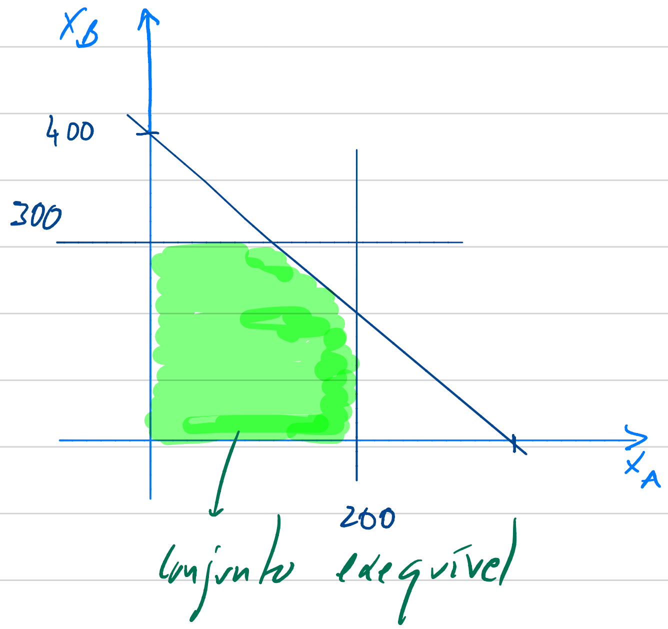
$\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$



- $x_A + x_B \leq 400$

  $x_B \leq 400 - x_A$

- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

Programação Linear - Exemplo

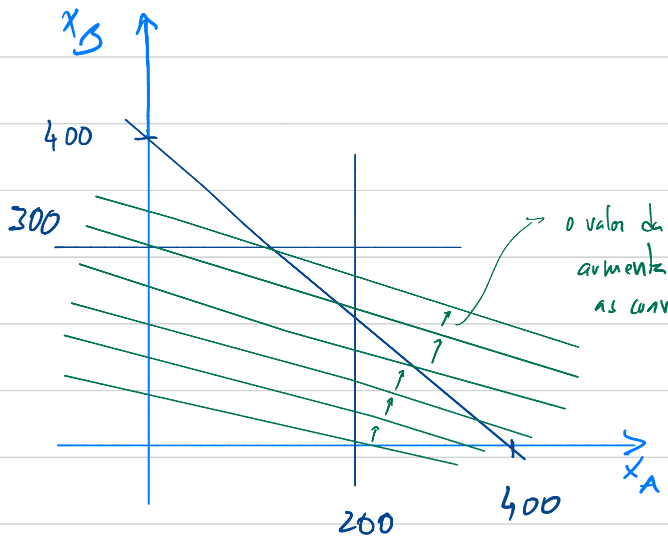
$\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$



- $x_A + x_B \leq 400$

  $x_B \leq 400 - x_A$

- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

- $\frac{c}{6} = 400$

  $0 = 400 - \frac{x_A}{6}$

  $x_A = 400 \times 6 = 2400$

- Curvas de nível da função Objectivo

  $x_A + 6x_B = c \Leftrightarrow x_B = c/6 - x_A/6$

  $-1/6$

Programação Linear - Exemplo 2

$\max \; x_A + 6\,x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$

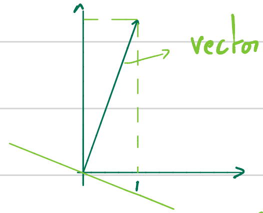
- $x_A + x_B \leq 400$

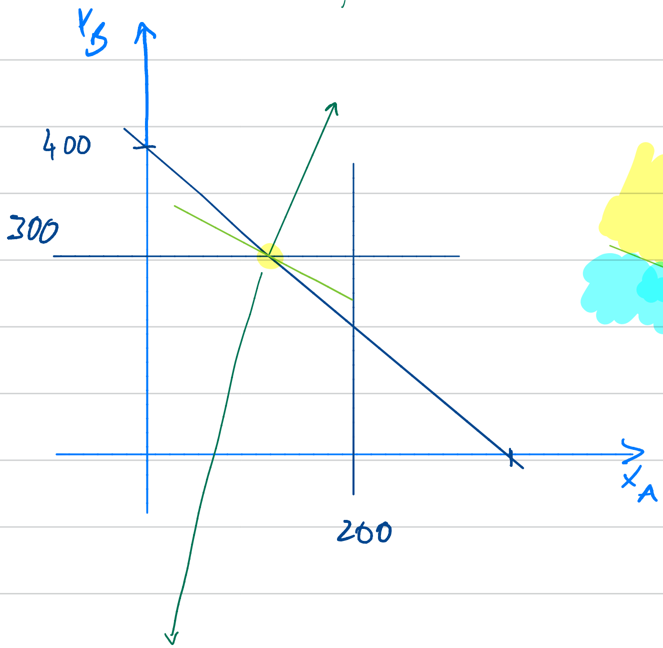
  $x_B \leq 400 - x_A$

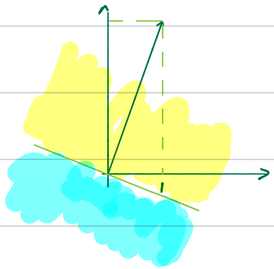
- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

$f(x_A, x_B) = x_A + 6 \cdot x_B$

$\nabla f = [1, 6]$







- Para aumentarmos o valor de f temos de nos deslocar na direcção do gradiente.

Não é possível deslocarmo-nos na direcção do gradiente permanecendo dentro do conjunto factível.

Máximo: $x_B = 300$ $\quad$ Lucro: $6 \times 300 + 100 = 1900$

$x_A = 100$

Programação Linear - Forma Standard

$$\max \ c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

(I) $\max \ -1000x_1 + 5000x_2 + 15000x_3$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480$$
$$7 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(II) $\max \ x_A + 6x_B$

$$x_A \leq 200$$
$$x_B \leq 300$$
$$x_A + x_B \leq 400$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

Programação Linear - Forma Standard

Ⓘ Minimização versus maximização

Multiplicar por -1

Ⓘ Variáveis sem restrição de serem não negativas

$x_i \begin{cases} x_i^- \\ x_i^+ \end{cases} \qquad x_i = x_i^+ - x_i^-$

Ⓘ Restrições com igualdade

$= \Rightarrow \leq \wedge \geq$

Ⓘ Restrições com $\geq$

Multiplicar por -1

Exemplo:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + 3\underline{x_2} \\ & x_1 + x_2 = 7 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_2 = x_2^+ - x_2^-$

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & -x_1 - x_2 \leq -7 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\ & x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 7 \\ & -x_1 - x_2^+ + x_2^- \leq -7 \\ & x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \leq 4 \\ & x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0 \end{aligned}$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \; c^T x \qquad \rightsquigarrow \qquad \max \; c^T x$$

$$Ax \leq b \qquad\qquad \tilde{x}_s = b - Ax$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad x_s \geq 0$$

$$x \geq 0$$

Forma slack

variáveis não básicas

$$\max \; x_A + 6x_B \qquad \Longrightarrow \qquad \max \; x_A + 6x_B$$

$$x_A \leq 200 \qquad\qquad s_1 = 200 - x_A$$

$$x_B \leq 300 \qquad\qquad s_2 = 300 - x_B$$

$$x_A + x_B \leq 400 \qquad\qquad s_3 = 400 - x_A - x_B$$

$$x_A, x_B \geq 0 \qquad\qquad x_A, x_B, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

variáveis básicas

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

Passo 0 - Colocar o Programa Linear na forma slack

$$\max \quad x_A + 6x_B$$
$$s_1 = 200 - x_A$$
$$s_2 = 300 - x_B$$
$$s_3 = 400 - x_A - x_B$$
$$x_A, x_B, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$z = x_A + 6x_B$$
$$s_1 = 200 - x_A$$
$$s_2 = 300 - x_B$$
$$s_3 = 400 - x_A - x_B$$
$$x_A, x_B, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \quad x_A + 6x_B$$
$$s_1 = 200 - x_A$$
$$s_2 = 300 - x_B$$
$$s_3 = 400 - x_A - x_B$$
$$x_A, x_B, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Passo 0 - Colocar o Programa linear na forma slack

Passo 1 - Escolher a variável não básica q̄ vai passar a básica: variável de entrada

(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica q̄ vai passar a não básica: variável de saída

$$z = x_A + 6x_B \longrightarrow \text{variável de entrada}$$
$$s_1 = 200 - x_A$$
$$s_2 = 300 - x_B \qquad (x_B \leq 300)$$
$$s_3 = 400 - x_A - x_B \qquad (x_B \leq 400)$$

variável de entrada

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$\max \; x_A + 6x_B$

$s_1 = 200 - x_A$

$s_2 = 300 - x_B$

$s_3 = 400 - x_A - x_B$

$x_A, x_B, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Passo 0 - Colocar o Programa linear na forma slack

Passo 1 - Escolher a variável não básica q̄ vai passar a básica: variável de entrada

(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica q̄ vai passar a não básica: variável de saída

$$
\begin{aligned}
z &= x_A + 6x_B \\
s_1 &= 200 - x_A \\
s_2 &= 300 - x_B \\
s_3 &= 400 - x_A - x_B
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
z &= 1800 + x_A - 6s_2 \\
s_1 &= 200 - x_A \\
x_B &= 300 - s_2 \\
s_3 &= 100 - x_A + s_2
\end{aligned}
$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

Passo 0 - Colocar o Programa linear na forma slack

$\max \quad x_A + 6x_B$

$s_1 = 200 - x_A$

$s_2 = 300 - x_B$

$s_3 = 400 - x_A - x_B$

$x_A, x_B, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Passo 1 - Escolher a variável não básica q vai passar a básica: variável de entrada

(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica q vai passar a não básica: variável de saída

$$\begin{aligned} z &= 1800 + x_A - 6s_2 \\ s_1 &= 200 - x_A \\ x_B &= 300 - s_2 \\ s_3 &= 100 - x_A + s_2 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} z &= 1900 - 5s_2 - s_3 \\ s_1 &= 100 - s_2 + s_3 \\ x_B &= 300 - s_2 \\ x_A &= 100 + s_2 - s_3 \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \leq 8$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\Longrightarrow$

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$
$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 8 - x_1$$
$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$z = 2x_1 + x_2$$
$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 8 - x_1$$
$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

$\Longrightarrow$

$$z = +16 + x_2 - 2x_4$$
$$x_3 = 20 - x_2 - 2x_4$$
$$x_1 = 8 - x_4$$
$$x_5 = 2 - x_2 + x_4$$

$\Downarrow$

$$z = +18 - x_4 - x_5$$
$$x_3 = 18 - 3x_4 + x_5$$
$$x_1 = 8 - x_4$$
$$x_2 = 2 - x_5 + x_4$$

Todos os coeficientes são negativos

$\Downarrow$

Terminámos!

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

Observação I: Cada vértice é especificado por um conjunto de n restrições activas.

Observação II: Vértices vizinhos têm $n-1$ restrições activas em comum.

Ideia:

- Começamos num qualquer vértice, se não for possível melhorar a função objectivo permanecendo exequível (factível / feasible), terminamos. Caso contrário, passamos para o melhor vizinho.

- Como é q encontramos o melhor vizinho?

  - Desactivamos uma das restrições activas e activamos outra.

Programação Linear - Exemplo

- A fábrica de automóveis Xpto consegue produzir os modelos
  - A, ao ritmo de 1 por minuto
  - B, ao ritmo de 1 por cada 2 mins
  - C, ao ritmo de 1 por cada 3 mins

- A legislação obriga a que, em média, cada veículo produzido na fábrica Xpto consiga percorrer 18 milhas por gallon.

- Milhas percorridas por gallon
  - A - 25
  - B - 15
  - C - 10

- Lucro por modelo:
  - A - 1000 $
  - B - 5000 $
  - C - 15.000 $

Pergunta: Qual o lucro máximo q̄ a Fábrica Xpto pode fazer num turno de 8 horas cumprindo as restrições governamentais?

Programação Linear - Exemplo

i	Tipo	Tempo de Produção (T_i)	Lucro (L_i)	Milhas percorridas por Gallon (M_i)
1	A	1 min	-1 k	25
2	B	2 mins	5 k	15
3	C	3 mins	15 k	10

Função Objectivo (Lucro): $L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3$

Restrição 1: $T_1 \cdot x_1 + T_2 \cdot x_2 + T_3 \cdot x_3 \leq 480$

Restrição 2: $7x_1 - 3x_2 - 8x_3 \geq 0$

Restrição 3: $\underbrace{x_1, x_2, x_3 \geq 0}_{\text{quantidades não negativas}}$

$$\left.\begin{array}{l} \max \; -1000x_1 + 5000x_2 + 15000x_3 \\ \text{sujeito a:} \\ \quad x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480 \\ \quad 7 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Programa linear
- Função objectivo linear
- Restrições lineares