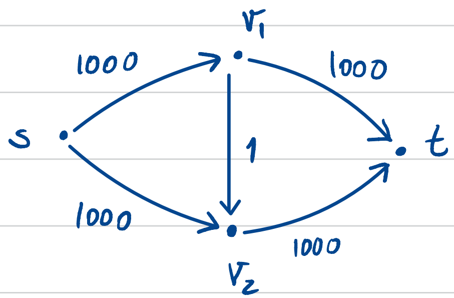
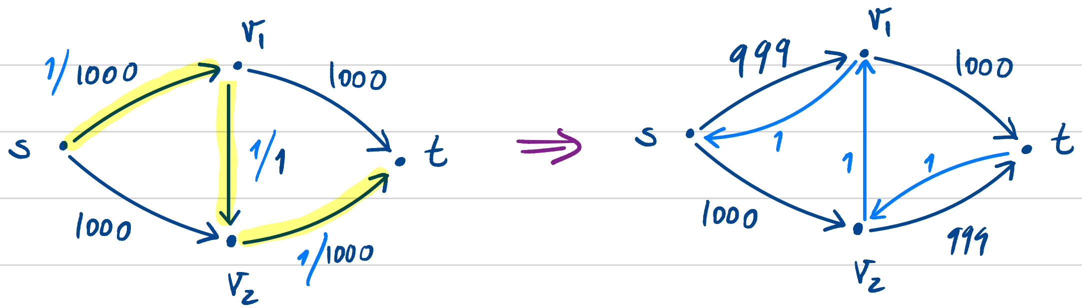
- Algoritmo de Edmonds-Karp
- Correspondência Bipartida Máxima

Aula 16

Método de Ford-Fulkerson: Complexidade

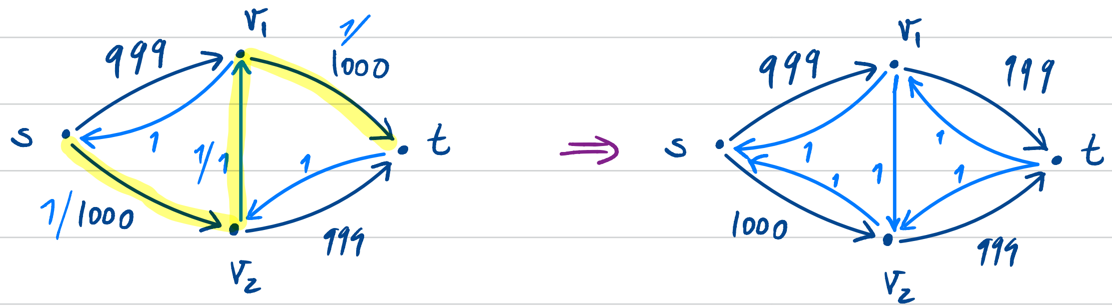


Ⓘ



$k = 1$

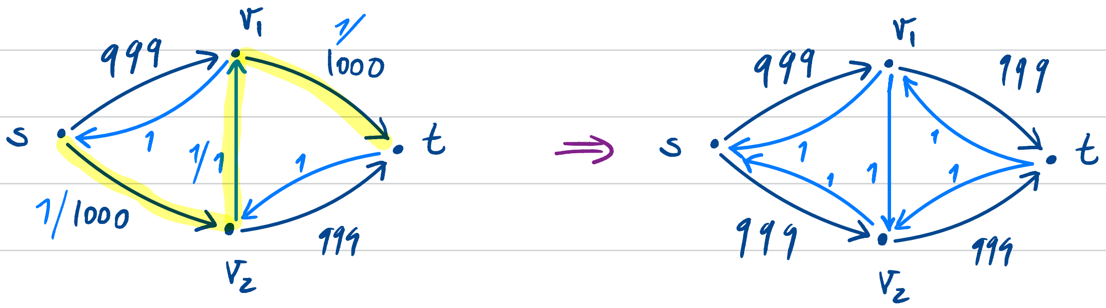
Ⅱ



$k = 2$

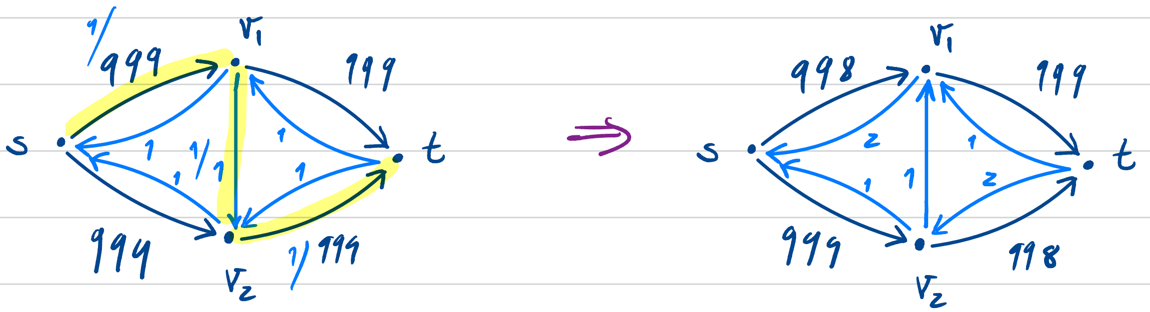
Método de Ford-Fulkerson: Complexidade

II



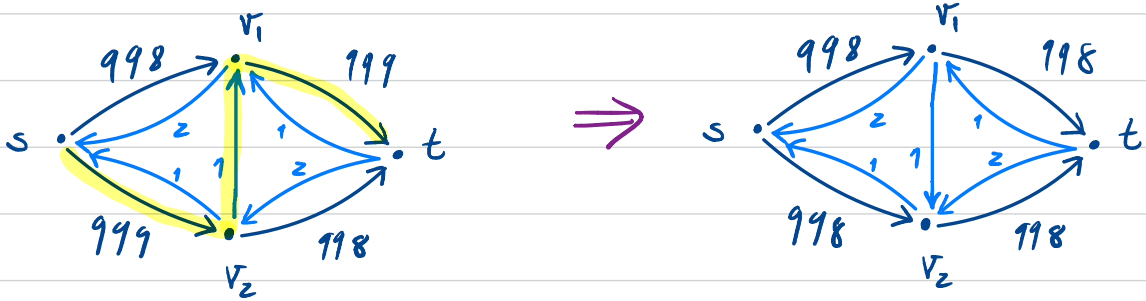
$k=2$

III



$k=3$

IV



$k=4$

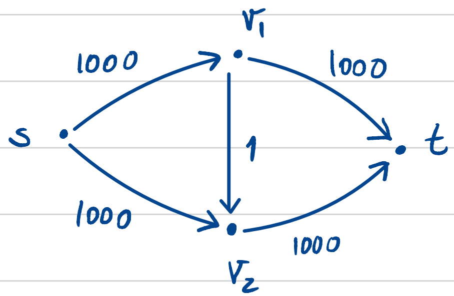
Quantas iterações?

2000 !!

Algoritmo de Edmonds-Karp

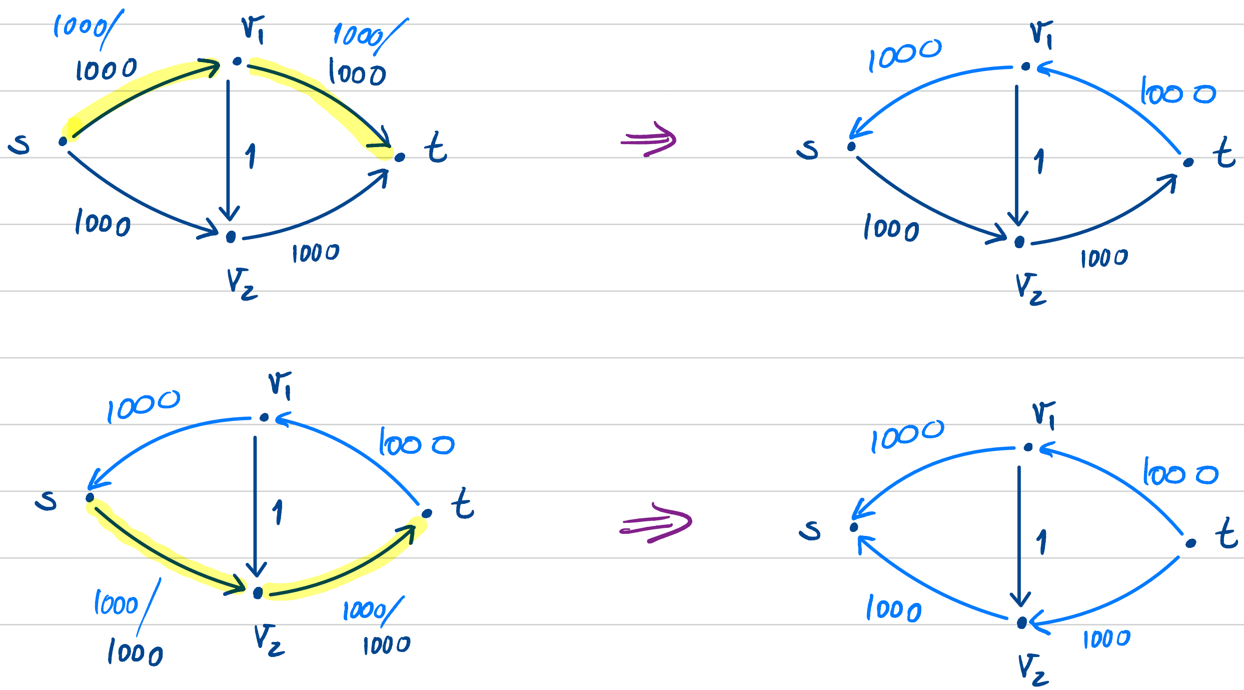
- Como escolher o caminho de aumento?

  ⇒ Caminho mais curto que liga s a t



Algoritmo de Edmonds-Karp

- Como escolher o caminho de aumento?
  - ⇒ Caminho mais curto que liga s a t



2 iterações!

Algoritmo de Edmonds-Karp

- Como escolher o caminho de aumento?

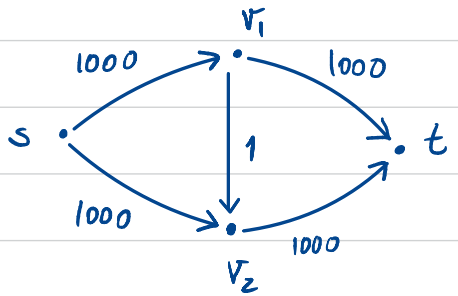
  ⇒ Caminho mais curto que liga s a t (em nº de arcos)

  ⇒ BFS para identificação dos caminhos mais curtos

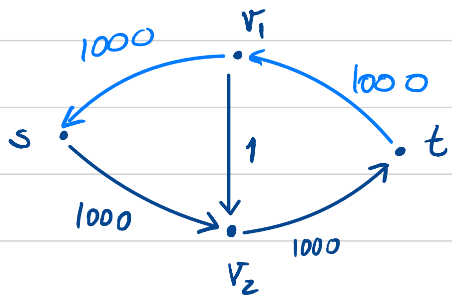
- Análise de Complexidade

Definição [Distância de Edmonds-Karp]

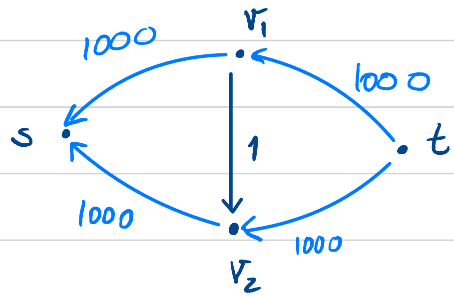
Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$ e u e v dois vértices em V, a distância de Edmonds-Karp entre u e v, denotada por $\delta_f(u,v)$, é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v em G_f.



$\delta_f(s,t) =$



$\delta_f(s,t) =$



$\delta_f(s,t) =$

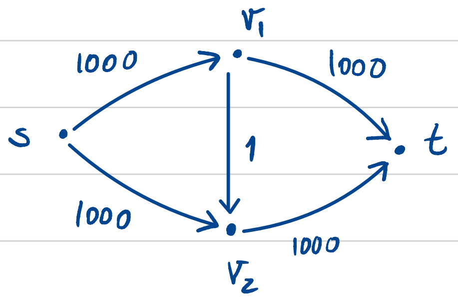
Algoritmo de Edmonds-Karp

- Como escolher o caminho de aumento?
  - ⇒ Caminho mais curto que liga s a t (em nº de arcos)
  - ⇒ BFS para identificação dos caminhos mais curtos

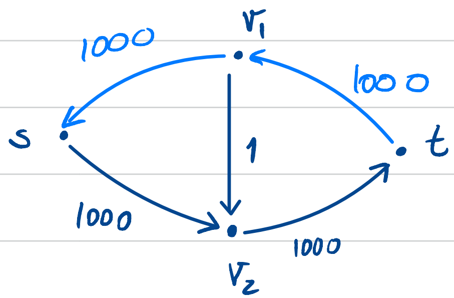
- Análise de Complexidade

Definição [Distância de Edmonds-Karp]

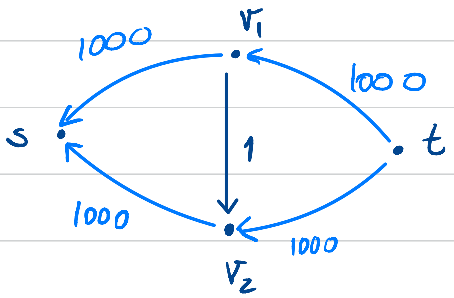
Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$ e u e v dois vértices em V, a distância de Edmonds-Karp entre u e v, denotada por $\delta_f(u,v)$, é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v em G_f.



$\delta_f(s,t) = 2$



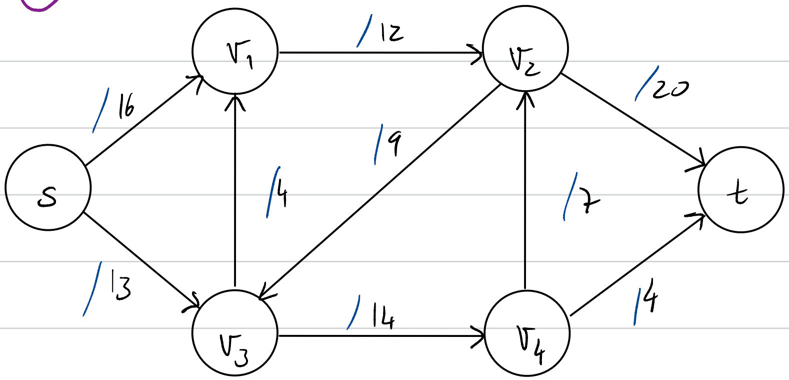
$\delta_f(s,t) = 2$



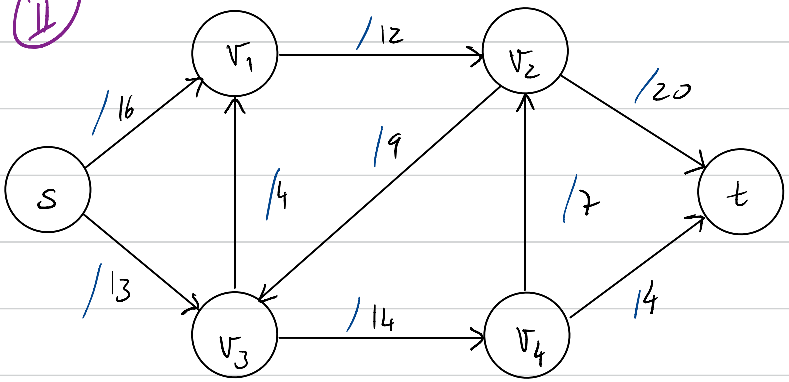
$\delta_f(s,t) = \infty$

Distância de Edmonds-Karp

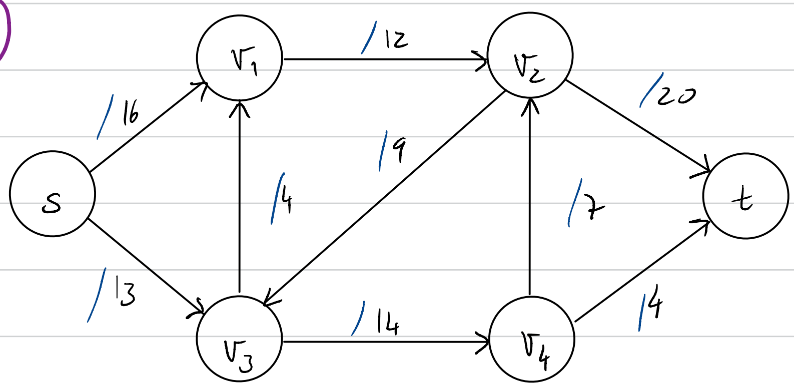
I



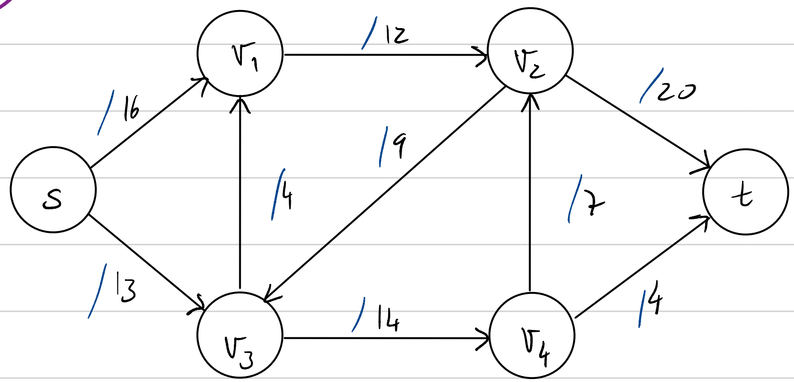
II



III

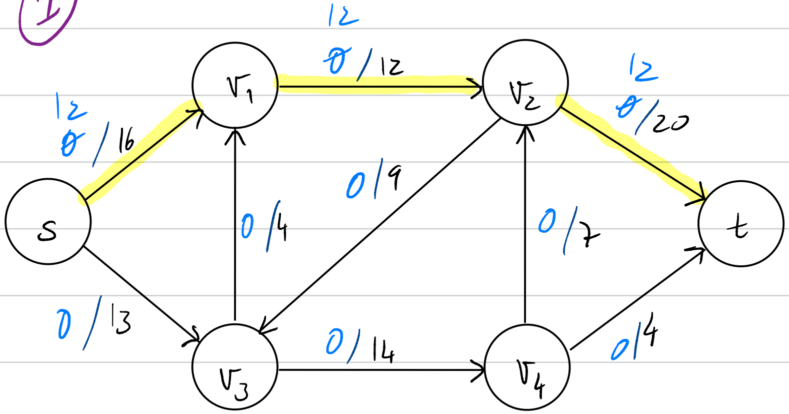


IV



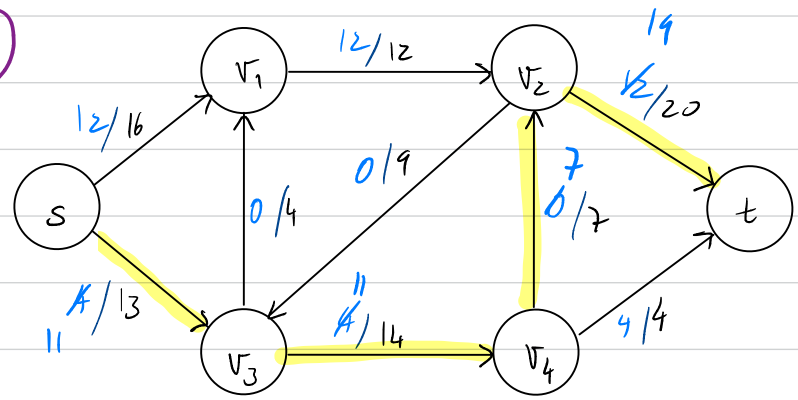
Distância de Edmonds-Karp

I



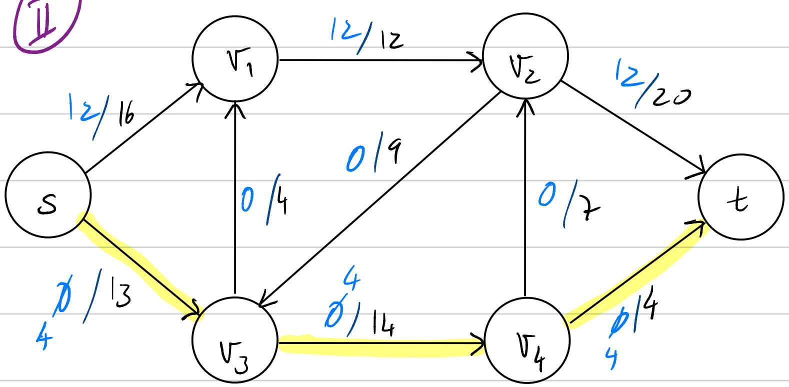
$\delta(s,t) = 3$

III



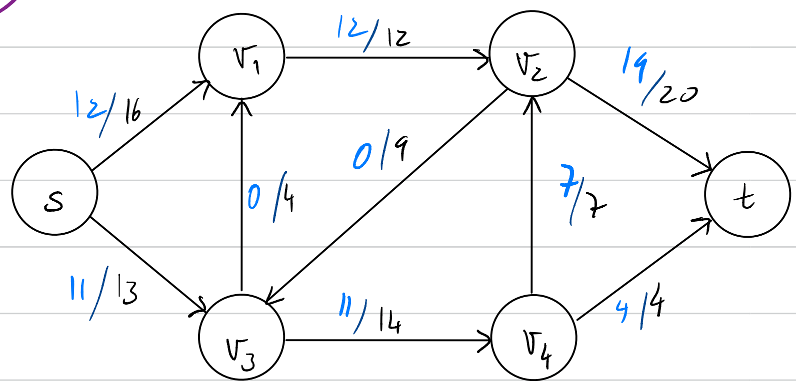
$\delta(s,t) = 4$

II



$\delta(s,t) = 3$

IV



$\delta(s,t) = \infty$

Distância de Edmonds-Karp

- Como é que a distância $\delta_f(s,t)$ evolui durante a aplicação do algoritmo Edmonds-Karp?

Aumenta

$$f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$$

- Complexidade do Algoritmo de Edmonds Karp

Quantas iterações é que podemos executar no máximo?

1. $f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$

2. O caminho curto entre s e t tem, no máximo, $|V|-1$ arcos

Complexidade:

3. Quantas iterações do algoritmo EK podemos executar no máximo até a distância $\delta_f(s,t)$ aumentar? $|E|$

Distância de Edmonds-Karp

- Como é que a distância $\delta_f(s,t)$ evolui durante a aplicação do algoritmo Edmonds-Karp?

  Aumenta

$$f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$$

- Complexidade do Algoritmo de Edmonds Karp

1. $f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$

2. O caminho curto entre s e t tem, no máximo, $|V|-1$ arcos

3. Quantas iterações do algoritmo Ek podemos executar no máximo até a distância $\delta_f(s,t)$ aumentar? $|E|$

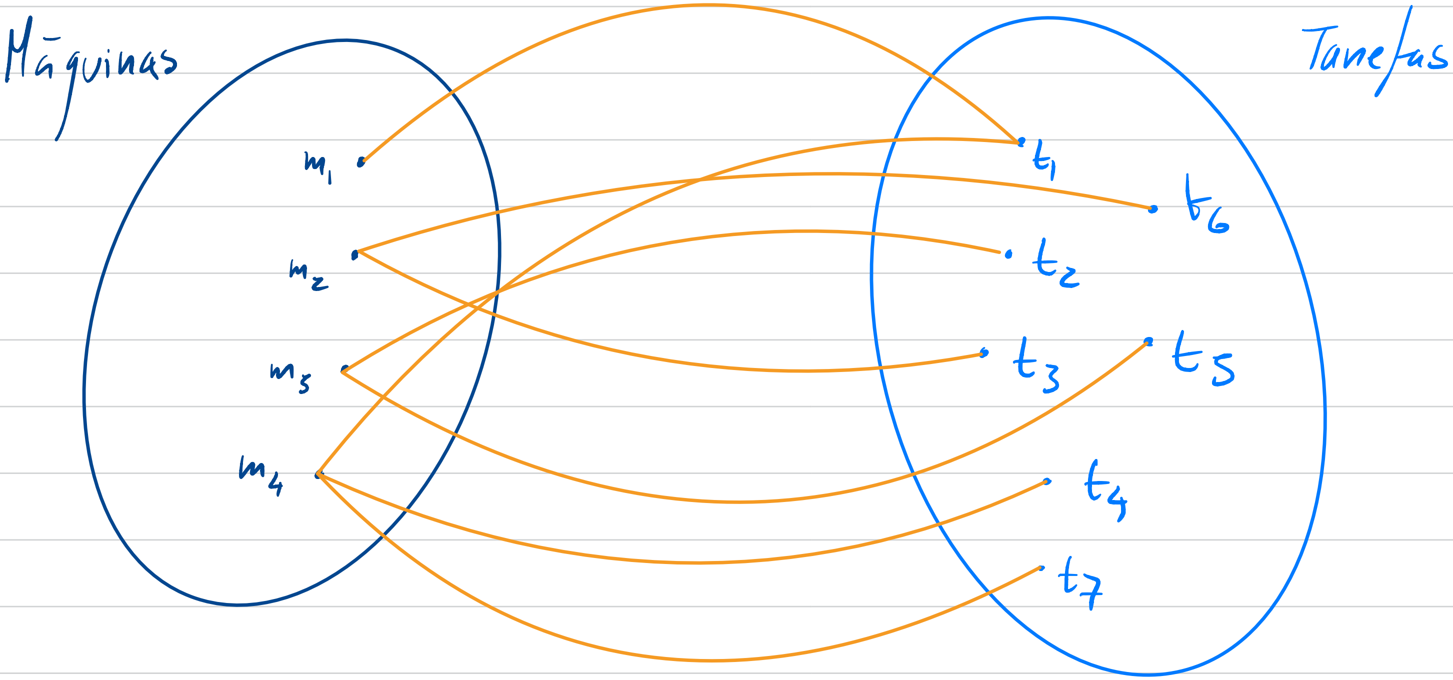
Quantas iterações é que podemos executar no máximo?

$O(E \cdot V)$

Complexidade:

$O(E^2 \cdot V)$

Problema da Correspondência Bipartida Máxima

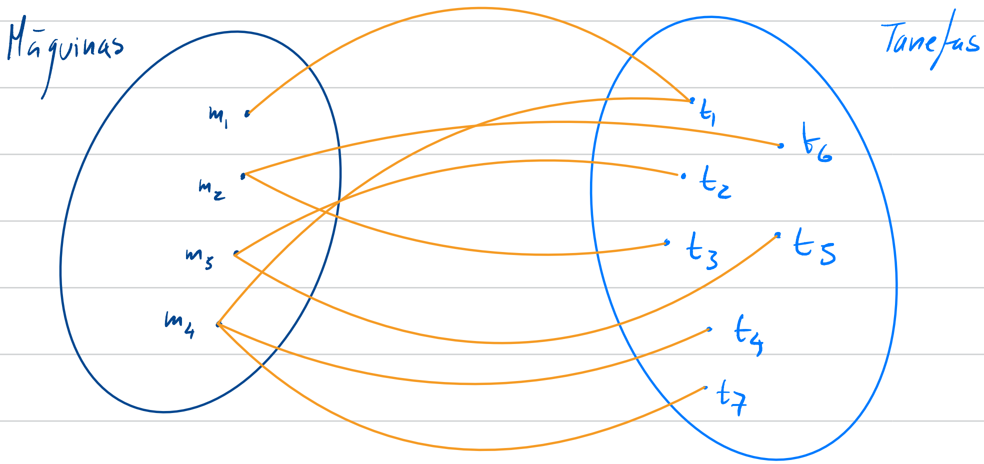


- Arco entre a tarefa t_i e a máquina m_j significa q m_j consegue executar t_i
- Problema: Sabendo q cada máquina só pode executar uma tarefa qual é o maior nº de tarefas q conseguimos executar em simultâneo?

Problema da Correspondência Bipartida Máxima

Definição [Bi-partição]

Dado um grafo $G=(V,E)$, uma bi-partição de $G=(V,E)$ é um par (L,R) tal que: $L \cup R = V$ e $L \cap R = \emptyset$.



Definição [Correspondência Bipartida]

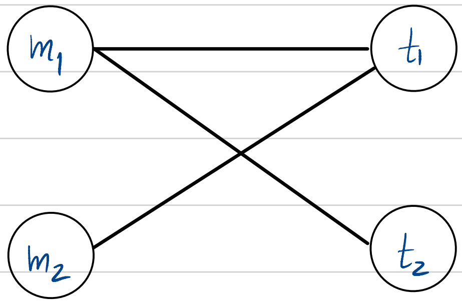
Dado um grafo $G=(V,E)$ e uma bi-partição (L,R) de G, $M \subseteq E$ diz-se uma correspondência bi-partida de G sse todos os vértices de V têm apenas um arco incidente em M.

Definição [Problema da Correspondência Bi-Partida Máxima]

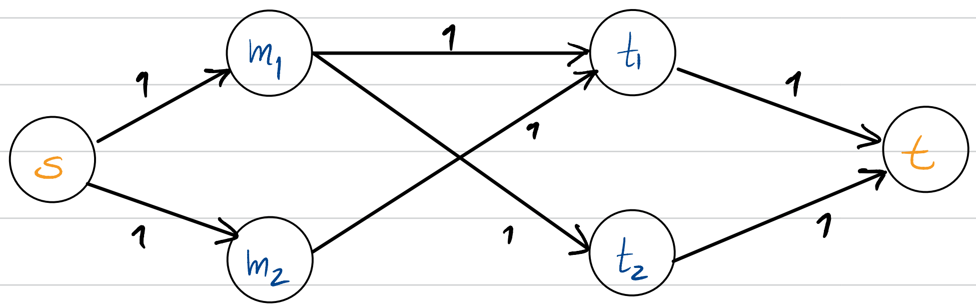
Dado um grafo $G=(V,E)$ e uma bi-partição (L,R) de G, o problema da correspondência bi-partida máxima consiste em determinar a correspondência bi-partida M com maior cardinalidade.

Correspondência Bipartida Máxima

- **Objectivo:** Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.



Correspondência Bipartida Máxima



- **Objectivo:** Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.

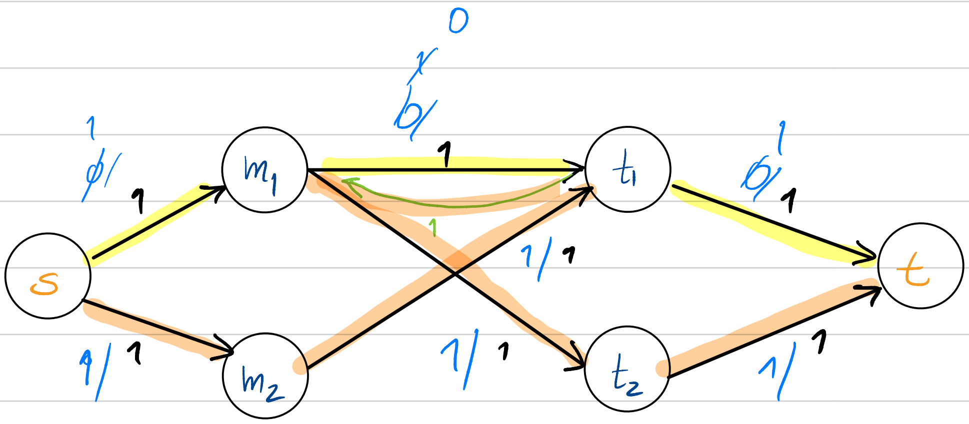
$G = (V, E)\ ,\ (L, R)$

$\Downarrow$

$G' = (V', E', s, t, c)$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Correspondência Bipartida Máxima



- **Objectivo:** Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.

$$G = (V, E),\ (L, R)$$

$$\Downarrow$$

$$G' = (V', E', s, t, c)$$

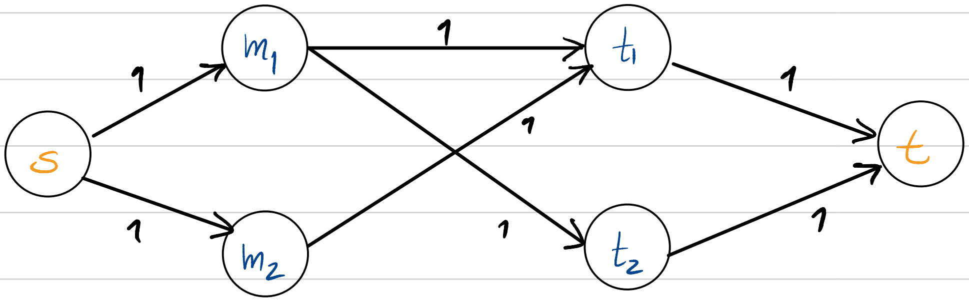
- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Correspondência:

$(m_1, t_2), (m_2, t_1)$

Correspondência Bipartida Máxima

• Objectivo: Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.



$G = (V, E)$, (L, R)

$\Downarrow$

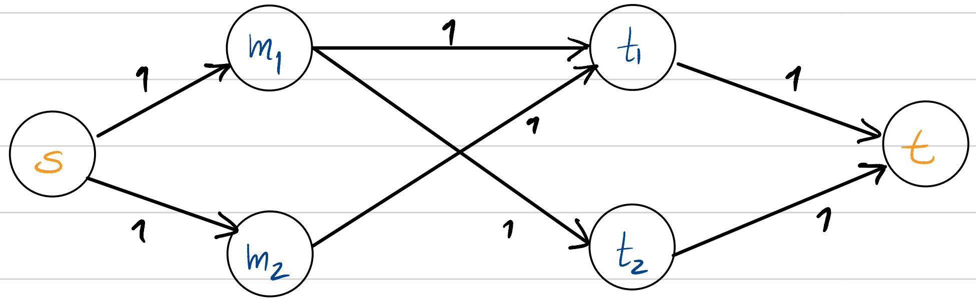
$G' = (V', E', s, t, c)$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

• Fluxo na rede $\Rightarrow$ Correspondência
(como calcular a correspondência máxima dado o fluxo)

Correspondência Bipartida Máxima

- Objectivo: Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.



$$G = (V, E), \ (L, R)$$

$$\Downarrow$$

$$G' = (V', E', s, t, c)$$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

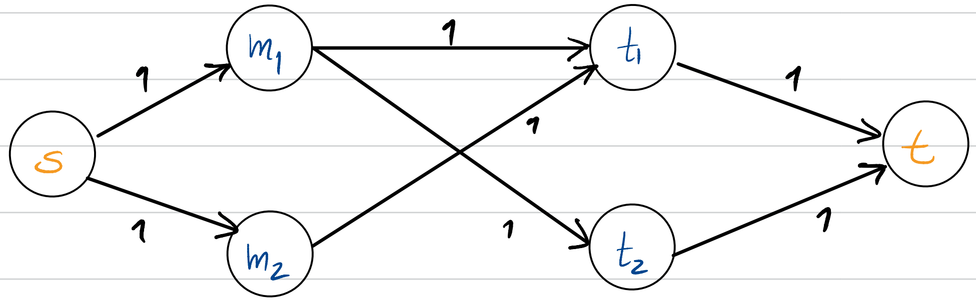
- Fluxo na rede $\Rightarrow$ Correspondência
  (como calcular a correspondência máxima dado o fluxo)

$$M_f = \{ (u, v) \mid u \in L \wedge v \in R \wedge f(u, v) = 1 \}$$

(TPC: provar que M é uma correspondência)

Correspondência Bipartida Máxima

- Objectivo: Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.



$G = (V, E)$, (L, R)

$\Downarrow$

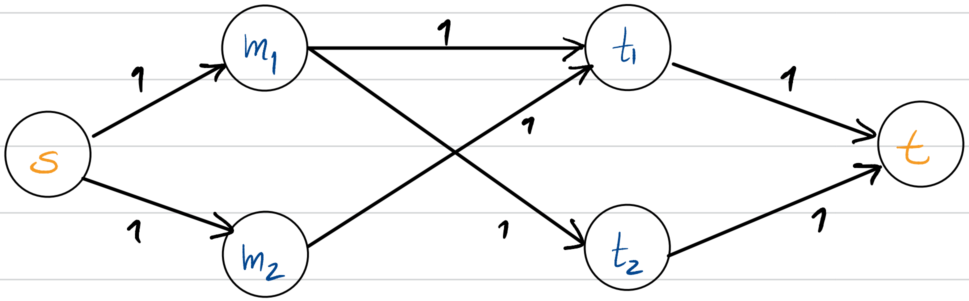
$G' = (V', E', s, t, c)$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

- Correspondência $\Rightarrow$ Fluxo na rede
(Como calcular o fluxo dada uma correspondência)

Correspondência Bipartida Máxima

- Objectivo: Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.



$G = (V, E)$, (L, R)

$\Downarrow$

$G' = (V', E', s, t, c)$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

- Correspondência $\Rightarrow$ Fluxo na rede
(como calcular o fluxo dada uma correspondência)

$$f_M(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in M \\ 1 & \text{se } u = s \text{ e } \exists w.\ (v, w) \in M \\ 1 & \text{se } v = t \text{ e } \exists x.\ (x, u) \in M \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

(TPC: provar que f_M é um fluxo)

Resultados Teóricos & Demonstrações
(Estudo Individual)

Lema [Monotonia da Distância de Edmonds-Karp]

$$f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$$

Prova

- Suponhamos q̄ existe v tal que $\delta_{f'}(s,v) > \delta_f(s,v)$.
  Assumimos sem perda de generalidade que não existe w tal que:
  - $\delta_{f'}(s,w) > \delta_f(s,w) \wedge \delta_{f'}(s,w) < \delta_{f'}(s,v)$

- Seja u o predecessor de v no caminho mais curto que o liga a s em $G_{f'}$.
  Segue que:

① $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$
$\geq \delta_f(s,u) + 1$

② $\delta_f(s,v) > \delta_{f'}(s,v) \geq \delta_f(s,u) + 1$

③ $\delta_f(s,v) > \delta_f(s,u) + 1$
$\Rightarrow (u,v) \notin E_f$

④ $(u,v) \in E_{f'} \wedge (u,v) \notin E_f$

- o caminho de aumento escolhido envia fluxo através do arco (v,u):
  $\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) + 1$

② + ④ $\Rightarrow \delta_f(s,v) > \delta_f(s,v) + 2$ ↯

Definição [Grafo dos Caminhos Mais Curtos em Rede Residual]

Dado um fluxo f numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$, o grafo dos caminhos caminhos mais curtos na rede G_f, denotado por $\tilde{G}_f$, é definido como se segue:

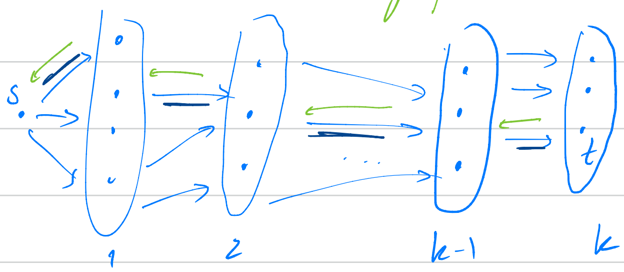
- $\tilde{G}_f = (V, \tilde{E}_f)$

  $\tilde{E}_f = \{ e \mid e \in E_f \wedge e$ participa de um caminho mais curto entre s e t $\}$

$$\boxed{f \mapsto_{EK} f'}$$

$\tilde{G}_f$

$\tilde{G}_{f'}$ vai conter arcos pr trás no grafo dos caminhos mais curtos



- Podem existir um vértice $v \in V$ a uma distância $k' > k$?

- Arcos "para trás" no grafo dos caminhos mais curtos podem ser utilizados para obter caminhos ainda mais curtos?

Definição [Grafo dos Caminhos Mais Curtos em Rede Residual]

Dado um fluxo f numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$, o grafo dos caminhos caminhos mais curtos na rede G_f, denotado por $\tilde{G}_f$, é definido como se segue:

- $\tilde{G}_f = (V, \tilde{E}_f)$

$\tilde{E}_f = \{ e \mid e \in E_f \wedge e$ participa de um caminho mais curto entre s e t $\}$

Lema dos Caminhos Mais Curtos em Rede Residual

$$f \mapsto_{EK} f' \wedge \delta_f(s,t) = \delta_{f'}(s,t) \Rightarrow \tilde{E}_{f'} \subset \tilde{E}_f$$

Prova: Vamos provar que:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \mapsto_{EK} f' \\ \cdot\ \delta_f(s,t) = \delta_{f'}(s,t) \\ \cdot\ (u,v) \in \tilde{E}_{f'} \end{array}\right| \Rightarrow (u,v) \in \tilde{E}_f$$

Supomhamos que: $\underbrace{(u,v) \in \tilde{E}_{f'} \wedge (u,v) \notin \tilde{E}_f}$

① (v,u) pertence ao caminho de aumento

$\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) + 1$

② $$\begin{aligned} \delta_{f'}(s,v) &= \delta_{f'}(s,u) + 1 \\ &\geq \delta_f(s,u) + 1 \\ &= \delta_f(s,v) + 2 \end{aligned}$$

$\delta_{f'}(s,v) - \delta_f(s,v) > 0$

③ $$\begin{array}{r} \delta_{f'}(s,v) + \delta_{f'}(v,t) = k \\ \delta_f(s,v) + \delta_f(v,t) \geq k \\ \hline \underbrace{(\delta_{f'}(s,v) - \delta_f(s,v))}_{\geq 0} + \underbrace{(\delta_{f'}(v,t) - \delta_f(v,t))}_{\leq 0} \leq 0 \end{array}$$

$\therefore \Rightarrow$ Contradiz o lema da Monotonia da Distância de EK

Lema dos Caminhos Mais Curtos em Rede Residual

$$f \mapsto_{EK} f' \wedge \delta_f(s,t) = \delta_{f'}(s,t) \Rightarrow \tilde{E}_{f'} \subset \tilde{E}_f$$

Prova: Vamos provar que:

- $f \mapsto_{EK} f'$
- $\delta_f(s,t) = \delta_{f'}(s,t)$
- $(u,v) \in \tilde{E}_{f'}$

$\Rightarrow (u,v) \in \tilde{E}_f$

Suponhamos que: $\underbrace{(u,v) \in \tilde{E}_{f'} \wedge (u,v) \notin \tilde{E}_f}$

1. (v,u) pertence ao caminho de aumento

$$\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) + 1$$

2. $$\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1 \geq \delta_f(s,u) + 1 = \delta_f(s,v) + 2$$

$$\delta_{f'}(s,v) - \delta_f(s,v) > 0$$

3. $$\delta_{f'}(s,v) + \delta_{f'}(v,t) = k$$

$$\delta_f(s,v) + \delta_f(v,t) \geq k$$

$$\underbrace{(\delta_{f'}(s,v) - \delta_f(s,v))}_{\geq 0} + \underbrace{(\delta_{f'}(v,t) - \delta_f(v,t))}_{\leq 0} \leq 0$$

$\therefore \Rightarrow$ Contradiz o lema da Monotonia da Distância de EK

4. $\tilde{E}_{f'} \subseteq \tilde{E}_f$ (de 3)

$\hookrightarrow$ Falta provar que $\tilde{E}_{f'} \subsetneq \tilde{E}_f$

- Basta notar que o arco saturado no caminho de aumento desaparece de $\tilde{E}_f$