Laboratório de Engenharia Química IV

Programação de Ensaios

M. Gabriela Bernardo Gil

2006/2007

ÍNDICE

1. TEORIA DE ERROS 4
1.1. MEDIÇÃO DE GRANDEZAS 5
1.2. ERROS 6
1.2.1. ERRO ABSOLUTO 6
1.2.2. ERRO RELATIVO 6
1.2.3. TIPOS DE ERROS 8
1.3. CONJUNTO FUNDAMENTAL 9
1.3.1. CRITÉRIOS PROBABILÍSTICOS 11
1.4. CONJUNTO AMOSTRA 12
1.4.1. INTERVALOS DE INDETERMINAÇÃO 13
1.4.2. CRITÉRIO DE REJEIÇÃO DE VALORES 14
1.5. MEDIÇÕES INDIRECTAS 16
1.5.1. PROPAGAÇÃO DE ERROS 16
1.5.1.1 LIMITE SUPERIOR DO ERRO 18
1.5.1.2 ERRO MAIS PROVÁVEL OBTIDO POR PROPAGAÇÃO DE ERROS 21
1.6. ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS 23
1.6.1. EXPRESSÃO DE RESULTADOS 23
2. ANÁLISE DE REGRESSÃO 25
2.1. CÁLCULO DE PARÂMETROS 26
2.1.1. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRÁTICOS 26
2.2. REGRESSÃO LINEAR SIMPLES 27
2.2.1. COEFICIENTE ANGULAR 28
2.2.2. ORDENADA NA ORIGEM 28
2.2.3. VARIÂNCIA DA CORRELAÇÃO LINEAR SIMPLES 28
2.2.4. INTERVALO DE CONFIANÇA DO COEFICIENTE ANGULAR 29
2.2.5. INTERVALO DE CONFIANÇA DA ORDENADA NA ORIGEM 29
2.2.6. INTERVALOS DE INDETERMINAÇÃO DE Y 30
2.2.7. PREVISÃO DE $\underline{\hat{X}}$ PARA UM DADO VALOR DE Y 32
2.2.8. RECTA QUE PASSA PELA ORIGEM 33
2.2.9. RECTA QUE PASSA POR UM PONTO FIXO 33
2.3. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA 37
2.3.1. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRÁTICOS 38
2.3.2. DESVIO PADRÃO 39
2.3.3. INTERVALOS DE CONFIANÇA DOS PARÂMETROS 39
2.3.4. INTERVALO DE INDETERMINAÇÃO DA CURVA 40
2.4. REGRESSÃO POLINOMIAL 41
2.4.1. REGRESSÃO QUADRÁTICA 41

2.4.1.1. TESTE DE LINEARIDADE 42
2.4.1.2. ESTIMATIVA DE X PARA UM DADO VALOR DE Y 42
3. ANÁLISE DE VARIÂNCIA 43
3.1. ANÁLISE DE VARIÂNCIA DA REGRESSÃO LINEAR SIMPLES 43
3.1.1. MEDIÇÕES DE Y REPETIDAS PARA UM DADO VALOR DE X 46
3.2. ANÁLISE DE VARIÂNCIA NA REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA 49
4. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS 50
4.1. SELECÇÃO DE EQUIPAMENTO 51
4.2. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS ATENDENDO À ESTATÍSTICA 55
4.2.1. SEM APOIO EM ENSAIOS PRÉVIOS 55
4.2.2. COM APOIO EM ENSAIOS PRÉVIOS 56
4.3. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS EM MEDIDAS INDIRECTAS 57
4.3.1. Atendento ao limite superior do erro 57
4.3.2. Atendento ao valor mais provável do erro 57
4.4. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS NA CORRELAÇÃO LINEAR SIMPLES 59
4.4.1. SEM APOIO EM ENSAIOS PRÉVIOS 59
4.4.1.1. Resposta no eixo das ordenadas Δy 59
4.4.1.2. Resposta no declive $\Delta\alpha_1$ 59
4.4.2. COM APOIO EM ENSAIOS PRÉVIOS 61
4.5. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS EM CORRELAÇÕES NÃO LINEARES 61
4.6. EXEMPLOS DE PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS 62
4.6.1. Um exemplo para o trabalho de Filtração 62
4.6.2. Um exemplo para o trabalho de Transporte Pneumático 64
4.6.3. Um exemplo para o trabalho de Tanque com Agitação 67
4.6.4. Um exemplo para o trabalho de Destilação Fraccionada 69
4.6.5. Um exemplo para o trabalho de Coluna de Bolhas 70
4.6.6. Um exemplo para o trabalho de Torre de Arrefecimento 71
5. PLANIFICAÇÃO FACTORIAL 72
5.1. ANÁLISE DE VARIÂNCIA (ANOVA) NA PLANIFICAÇÃO A UM FACTOR 76
5.2. ANÁLISE DE VARIÂNCIA (ANOVA) NA PLANIFICAÇÃO MULTIFACTORIAL 78
6. RSM - MÉTODO DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA 79
6.1. C C D (CENTRAL COMPOSITE DESIGN) 81

1. TEORIA DE ERROS

REALIZAÇÃO EXPERIMENTAL $\Rightarrow$ DETERMINADO ERRO

$\Downarrow$

- Significado face ao erro admitido
- Existe sempre

EM ENGENHARIA

- ERROS ELEVADOS, POR VEZES:
  - a) Dificuldades $\Rightarrow$ Custo elevado
  - b) Métodos de cálculo não aperfeiçoados
  - c) Simplificações necessárias
  - d) Dados económicos $\Rightarrow$ Grande erro

PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS

- MINIMIZAÇÃO DOS ERROS SISTEMÁTICOS

- MINIMIZAÇÃO DOS ERROS ALEATÓRIOS

DETERMINAR O NÚMERO DE ENSAIOS de modo a atingir o fim em vista

INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

1.1. MEDIÇÃO DE GRANDEZAS

$$\text{Estima} - \text{se o VALOR da GRANDEZA} \begin{cases} \text{MEDIÇÕES DIRECTAS} \\ \text{MEDIÇÕES INDIRECTAS} \end{cases}$$

MEDIÇÕES DIRECTAS

INTERPRETAR OS RESULTADOS, ANALISANDO:

- Consistência interna
- Rejeição de valores
- Intervalos de confiança

MEDIÇÕES INDIRECTAS

$$M = f(M_1, M_2, \ldots, M_n)$$

- Erros inerentes a cada grandeza independente
- Propagação de erros

1.2. ERROS

ERRO = E = M - V

M - VALOR MEDIDO

V - VERDADEIRO VALOR DA GRANDEZA

1.2.1. ERRO ABSOLUTO

$$E = |M - V|$$

1.2.2. ERRO RELATIVO

$$\varepsilon = \frac{E}{V}$$

V ? $\Rightarrow$ Não é possível conhecer. Só com ∞ determinações.

ESTIMA-SE V através de $\Rightarrow$ $\overline{M}$

ERROS ? $\Rightarrow$ GRAU DE CONFIANÇA NA MEDIÇÃO

Se não se conhecem

$\Downarrow$

- Decisões erradas
- Perda de tempo
- Perda de dinheiro

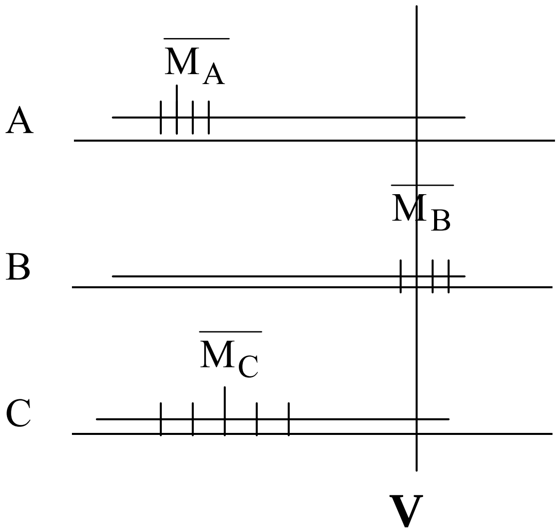
NÍVEL DE ERRO ⇒ Obtenção da precisão necessária com o mínimo de tempo e de dinheiro.

EXACTIDÃO ⇒ Concordância entre o valor da medição e o verdadeiro valor da grandeza.

PRECISÃO ⇒ Concordância entre vários valores da medição obtidos nas mesmas condições (**REPETIÇÕES** ou **RÉPLICAS**)

Exprime a **REPRODUTIBILIDADE** dos resultados.

PRECISÃO não implica EXACTIDÃO!!!!



A: PRECISO mas NÃO EXACTO

B: PRECISO e EXACTO

C: NÃO PRECISO e NÃO EXACTO

1.2.3. TIPOS DE ERROS

SISTEMÁTICOS

– SÃO DETERMINÁVEIS E CORRIGÍVEIS

– PODEM SER EVITADOS

- **INSTRUMENTAIS** *DESCALIBRAÇÃO ; MATERIAL VOLUMÉTRICO*
- **DE REAGENTES** *IMPUREZAS*
- **DE OPERAÇÃO** *INEXPERIÊNCIA*
- **PESSOAIS** *DALTONIA ; MIOPIA; ESCOLHA DE RESULTADOS FORÇADOS*
- **MÉTODO** *SENSIBILIDADE DE APROXIMAÇÕES ; REACÇÕES INCOMPLETAS ; REACÇÕES INDUZIDAS – PARALELAS ; DECOMPOSIÇÃO ; VOLATILIDADE*

ALEATÓREOS

– NÃO PODEM SER CORRIGIDOS

– NÃO PODEM SER EVITADOS

– PODEM SER **MINIMIZADOS**

- **REVELADOS POR PEQUENAS DIFERENÇAS**
- **APLICAM-SE A MEDIÇÕES EFECTUADAS PELO MESMO OPERADOR E COM A MESMA APARELHAGEM**

PRECISÃO ⇒ **ERROS ALEATÓRIOS**

EXACTIDÃO ⇒ **ERROS SISTEMÁTICOS**

ERROS CONSTANTES – Independentes do tamanho da amostra

ERROS PROPORCIONAIS – Dependem do tamanho da amostra

1.3. CONJUNTO FUNDAMENTAL

$$\mathbf{N = \infty}$$

MÉDIA ou VALOR MÉDIO

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^N X_i}{N} \qquad \text{se } N \to \infty \Rightarrow \bar{X} \to V = \mu$$

N – Nº de valores do conjunto

DESVIO PADRÃO

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\left(X_i - \mu\right)^2}{N}}$$

σ - Grau de dispersão dos valores x em torno da média

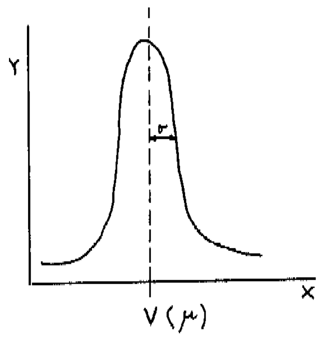
O número de Graus de liberdade (N) coincide com o número de valores do conjunto, porque, no conjunto fundamental não se estabelecem relações.

DESVIO MÉDIO DO CONJUNTO FUNDAMENTAL

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\left|X_i - \mu\right|}{N} \qquad \delta \cong 0.8\,\sigma$$

SE **SÓ** HOUVER **ERROS ALEATÓRIOS**

- Os valores médios distribuem-se de acordo com a **LEI NORMAL DE GAUSS**:



$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

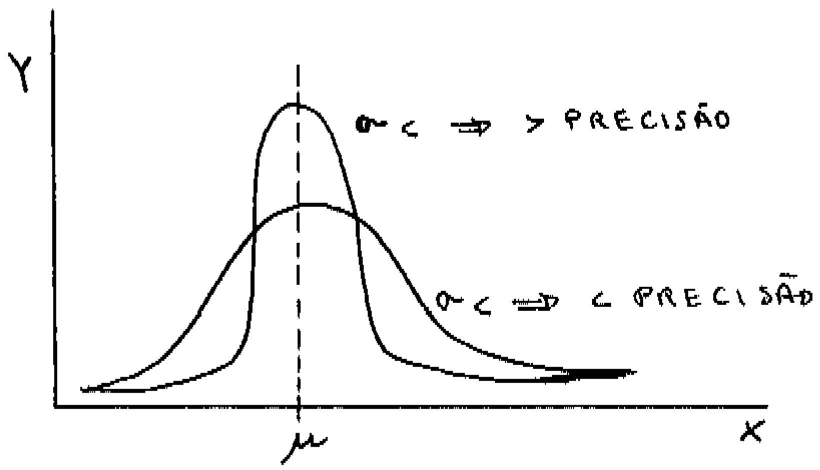
Y - frequência da ocorrência dos desvios

X - valor medido

μ - valor mais provável da grandeza

(média do conjunto fundamental ou média objectiva)

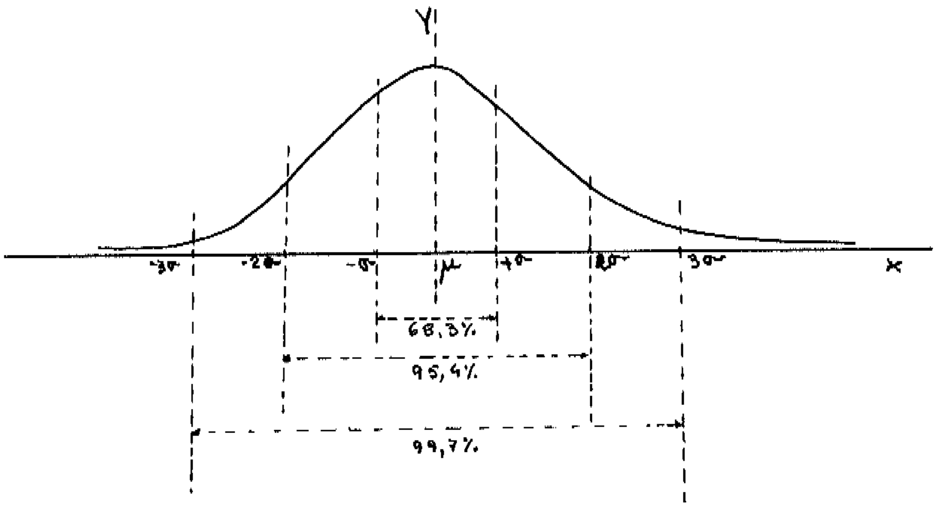
O **DESVIO PADRÃO** CARACTERIZA A **PRECISÃO**



1.3.1. CRITÉRIOS PROBABILÍSTICOS

INTERVALO	PROBABILIDADE (%)
$X = \mu \pm \sigma$	68,3
$X = \mu \pm 2\sigma$	95,4
$X = \mu \pm 3\sigma$	99,7
$X = \mu \pm 4\sigma$	99,98

O MAIS UTILIZADO EM ENGENHARIA É O CRITÉRIO DE 2σ.



1.4. CONJUNTO AMOSTRA

MÉDIA - VALOR MÉDIO

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n} \qquad \textbf{SE } n \to \infty \Rightarrow \bar{x} \to \mu$$

DESVIO MÉDIO

$$\bar{d} = \frac{\sum_1^n \left| X_i - \bar{X} \right|}{n}$$

DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO
ou
DESVIO PADRÃO DA AMOSTRA

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad \textbf{SE } n \to \infty \Rightarrow s \to \sigma$$

(n – 1) – Nº DE GRAU DE LIBERDADE

VARIÂNCIA $\Rightarrow$ s^2

COEFICIENTE DE VARIÂNCIA

$$\frac{s}{\bar{X}}$$

- Muito útil para comparar vários conjuntos de dados semelhantes, mas com valores médios diferentes

1.4.1. INTERVALOS DE INDETERMINAÇÃO

A) **AMOSTRAS GRANDES**

n > 50 , 60 (?)

$$\mu = \bar{x} \pm \frac{z \ . \ s}{\sqrt{n}}$$

z - É UMA VARIÁVEL NORMALIZADA QUE DEPENDE DA PROBABILIDADE

P	z
0,9	1,64
0,95	1,96
0,954	2,00
0,98	2,33
0,99	2,58

B) **AMOSTRAS PEQUENAS**

$$\mu = \bar{x} \pm \frac{t \ . \ s}{\sqrt{n}}$$

INTERVALO DO **VALOR MAIS PROVÁVEL DA GRANDEZA**

t - FACTOR DE **STUDENT** (GOSSET, 1908)

DEPENDE DE P - PROBABILIDADE E DE n-1 - Nº DE GRAUS DE LIBERDADE.

A DISTRIBUIÇÃO DE **STUDENT** ⇒ DISTRIBUIÇÃO **NORMAL DE GAUSS, QUANDO n ⇒ ∞**

1.4.2. CRITÉRIO DE REJEIÇÃO DE VALORES

$$x_i = \bar{x} \pm t \cdot s$$

Intervalo dos **VALORES POSSÍVEIS** para a medição da grandeza

Quando se **REJEITA** um valor?

a) Determina-se **($\bar{x}$)** sem o valor em teste **Xk**

b) Determina-se (s):

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

c) Determina-se **t** para **95%** e **n-1**, em que em **n** não entra o valor de teste Xk

d) Determina-se o intervalo ($x_i = \bar{x} \pm t \cdot s$)

e) Xk **NÃO** cai dentro do intervalo? ⇒ **REJEITA-SE**

f) Xk cai dentro do intervalo? ⇒ **NÃO SE REJEITA** e refazem-se os cálculos entrando com esse valor.

g) Determina-se o intervalo $\mu = \bar{x} \pm \frac{t \cdot s}{\sqrt{n}}$

Exemplo:

Realizaram-se três séries de medidas da concentração de cobalto em três amostras obtidas dividindo, em partes alíquotas, uma mesma amostra da solução.
A) Verificar se as medições são concordantes.
B) Indique qual o melhor valor a adoptar como valor da concentração de cobalto nesta solução.

1ª série (g/l)	2ª série (g/l)	3ª série (g/l)
26,1	26,6	26,6
25,8	26,8	26,9
26,3	26,2	26,7
26,8	26,9	26,6
25,9	27,1	26,7
26,2	27,0	26,6

A)

1ª série

26.8 é valor possível da grandeza?

Tools → Data Analysis → Descriptive Statistics

	Column1
Mean	26.06
Standard Error	0.092736
Median	26.1
Mode	#N/A
Standard Deviation	0.207364
Sample Variance	0.043
Kurtosis	-1.96322
Skewness	-0.23551
Range	0.5
Minimum	25.8
Maximum	26.3
Sum	130.3
Count	5
Confidence Level(95.0%)	0.257477

t (p=95%, n-1=4)

TINV(0.05,4) = 2.776451

$X_i = 26.06 \pm 0.58$

26.8 NÃO pertence ao intervalo

REJEITA-SE na 1ª série

26.2 REJEITA-SE na 2ª série;

26.9 REJEITA-SE na 3ª série

B)

2ª série: 26.64 – 27.71

1ª série: 25.80 – 26.32

3ª série: 26.56 – 26.68

2ª e 3ª séries concordantes

n = 11 $\boxed{\mu = 26.76 \pm 0.12}$

1.5. MEDIÇÕES INDIRECTAS

$$M = f(M_1, M_2, \ldots, M_n)$$

Sabendo:

$$\text{Erro em } M = \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \ldots \\ M_n \end{vmatrix} \Rightarrow \text{calcula-se} \begin{cases} \text{o limite superior do erro} \\ \text{e/ou} \\ \text{o erro mais provável} \end{cases}$$

1.5.1. PROPAGAÇÃO DE ERROS

Se **<u>Q</u>** for o **valor mais provável** da grandeza **<u>M</u>**

$$Q = f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

Em que $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ são os valores mais prováveis de $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$

CASO 1

Existem m determinações de cada grandeza medida directamente:

$$\left|\begin{matrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} & \Rightarrow & M^{(1)} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{n2} & \Rightarrow & M^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \Rightarrow & \dots \\ M_{1m} & M_{2m} & \dots & M_{nm} & \Rightarrow & M^{(m)} \end{matrix}\right| \Rightarrow M = \overline{M} \pm \frac{t \,.\, s}{\sqrt{m}}$$

$$\overline{M} = \frac{\sum_{i=1}^{m} M^{(i)}}{m}$$

$$s_M = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (M^{(i)} - \overline{M})^2}{m - 1}}$$

CASO 2

Só são conhecidos os valores mais prováveis (q) das grandezas medidas directamente e os respectivos erros:

$$\begin{array}{|l} \mu_1 = q_1 \pm \Delta q_1 \\ \mu_2 = q_2 \pm \Delta q_2 \\ \quad\quad\quad \ldots \\ \mu_n = q_n \pm \Delta q_n \end{array}$$

1.5.1.1 LIMITE SUPERIOR DO ERRO

Como $\quad Q = f\,(q_1 , q_2 , \ldots , q_n)$

Diferenciando:

$$dQ = \frac{\partial f}{\partial q_1}\, dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\, dq_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\, dq_n$$

Substituindo as diferenciais por pequenos acréscimos finitos:

$$\Delta Q = \frac{\partial f}{\partial q_1}\, \Delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\, \Delta q_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\, \Delta q_n$$

que representa a **LEI GERAL DA PROPAGAÇÃO DOS ERROS (Limite superior do erro)**

A) **Limite superior do erro em ADIÇÕES ALGÉBRICAS**

Se $Q = \pm\, \alpha_1\, q_1 \pm \alpha_2\, q_2 \pm \ldots \pm \alpha_n\, q_n$

virá:

$$\Delta Q_{max} \leq \alpha_1\, \Delta q_1 + \alpha_2\, \Delta q_2 + \ldots + \alpha_n\, \Delta q_n$$

Exemplo:

Peso de um vaso vazio	= 14,0031 ± 0,0005 g
Peso do vaso + amostra	= 14,2047 ± 0,0005 g
Peso da amostra	= 0,2016 ± 0,0010 g

0.0010 g é o limite superior do erro absoluto na pesagem dessa amostra.

B) **Limite superior do erro em PRODUTOS EM R^n**

Se $$Q = K\, q_1^{\alpha_1} \,.\, q_2^{\alpha_2} \,.\, \dots \,.\, q_n^{\alpha_n}$$

Diferenciando:

$$\Delta Q = K \left(q_2^{\alpha_2} \dots q_n^{\alpha_n} \right) \alpha_1 \; q_1^{\alpha_1 - 1} \,.\, \Delta q_1 + \dots + \left(q_1^{\alpha_1} \dots q_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \right) \alpha_n \; q_n^{\alpha_n - 1} \,.\, \Delta q_n$$

Dividindo por Q:

$$\left(\frac{\Delta Q}{Q} \right)_{max} \le |\alpha_1| \frac{\Delta q_1}{q_1} + |\alpha_2| \frac{\Delta q_2}{q_2} + \dots + |\alpha_n| \frac{\Delta q_n}{q_n}$$

Exemplo:

Determinar o calor desenvolvido numa resistência de R=100 ± 1 Ω, por uma corrente de intensidade I=1,00 ± 0,01 A, ao fim do tempo t=100 ± 1 s.

Resolução:

$$Q = R\, I^2\, t \;\Rightarrow\; \left(\frac{\Delta Q}{Q} \right)_{max} \le \frac{\Delta R}{R} + |2| \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t}$$

$$Q = 10000 \text{ J} \;\Rightarrow\; \frac{\Delta Q}{Q} \le \frac{4}{100} \;\Rightarrow\; \Delta Q \le 400 \text{ J}$$

4 % é o limite superior do erro relativo.

400 J é o limite superior do erro absoluto.

1.5.1.2 ERRO MAIS PROVÁVEL OBTIDO POR PROPAGAÇÃO DE ERROS

Admite-se, como boa aproximação, para 95 % de probabilidade, que a estimativa do erro é **DUAS VEZES** o valor do desvio padrão (raiz quadrada da variância):

$$\boxed{\Delta Q = 2\sqrt{\sigma_Q^2}}$$

Sendo:

$$Q = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Neste caso somam-se os quadrados das variâncias:

$$\sigma_Q^2 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2 \sigma_{q_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)^2 \sigma_{q_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)^2 \sigma_{q_n}^2$$

A) Erro mais provável em ADIÇÕES ALGÉBRICAS

Se $\quad Q = \pm\alpha_1 q_1 \pm \alpha_2 q_2 \pm \dots \pm \alpha_n q_n$

$$\boxed{\sigma_Q^2 = \alpha_1^2 \sigma_{q_1}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{q_2}^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_{q_n}^2}$$

$$\boxed{(\Delta Q)^2 = \alpha_1^2 (\Delta q_1)^2 + \alpha_2^2 (\Delta q_2)^2 + \dots + \alpha_n^2 (\Delta q_{n1})^2}$$

B) Erro mais provável em PRODUTOS EM R^{n}

Se $$Q = K\, q_1^{\alpha_1} \,.\, q_2^{\alpha_2} \,.\, \ldots \,.\, q_n^{\alpha_n}$$

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right)^2 = \alpha_1^2 \left(\frac{\sigma_{q_1}}{q_1}\right)^2 + \alpha_2^2 \left(\frac{\sigma_{q_2}}{q_2}\right)^2 + \ldots + \alpha_n^2 \left(\frac{\sigma_{q_n}}{q_n}\right)^2}$$

$$\boxed{(\varepsilon\, Q)^2 = \alpha_1^2\, (\varepsilon\, q_1)^2 + \alpha_2^2\, (\varepsilon\, q_2)^2 + \ldots + \alpha_n^2\, (\varepsilon\, q_{n1})^2}$$

Relembrando que, para 95 % de probabilidade admite-se que:

$$\boxed{\Delta Q = 2\, \sigma_Q}$$

Exemplo:

Determinar o calor desenvolvido numa resistência de R=100 ± 1 Ω, por uma corrente de intensidade I=1,00 ± 0,01 A, ao fim do tempo t=100 ± 1 s.

Resolução:

$Q = R\, I^2\, t$ $\qquad\qquad$ $Q = 10000$ J

$$\left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{0.5}{100}\right)^2 + 4\left(\frac{0.005}{1}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{100}\right)^2 = 0.0001$$

$\sigma_Q = 122$ J $\qquad\qquad$ $\Delta\, Q = 245$ J

$$\boxed{Q = (10{,}0 \pm 0{,}2) \times 10^3 \text{ J}}$$

1.6. ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

ALGARISMO SIGNIFICATIVO é qualquer dígito 1,2,....9 e o 0 (zero) quando colocado à direita da vírgula, desde que à sua esquerda já exista outro dígito.

1.6.1. EXPRESSÃO DE RESULTADOS

- Depende do **ERRO ABSOLUTO.**
- O último algarismo significativo que se deve incluir na expressão de um resultado é **o ALGARISMO DUVIDOSO**. **Mais** algarismos **significativos dão uma falsa aparência de correcção.**
- O número de algarismos significativos **do ERRO ABSOLUTO** deve ser **1** ou quanto muito **2**, se o primeiro dígito do erro fôr **1 ou 2**, tendo em atenção a regra anterior.
- O **VALOR MÉDIO** e o **ERRO** devem conter o **MESMO Nº de CASAS DECIMAIS.**
- A **SOMA ALGÉBRICA** deve conter o **NÚMERO DE CASAS DECIMAIS** igual ao da quantidade com **MAIOR ERRO ABSOLUTO**.
- O **PRODUTO ou o QUOCIENTE** deve conter o mesmo **NÚMERO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS** que o termo com **MENOR NÚMERO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS**.
- Em operações sucessivas deve usar-se sempre mais um algarismo significativo.

- Vejamos como se exprime o resultado da medição do diâmetro de uma BOLA.

INSTRUMENTO DE MEDIDA: craveira com nónio, com um erro = 0,1 mm.
Cada medição poderia ser expressa:
$X_i = \overline{X} \pm 0{,}1$ mm

CASO **A**

5,5; 5,4; 5,1; 5,2 mm

$\overline{X} = 5{,}3$ mm

s = 0,183

$\left. \begin{matrix} t_{95\%} \\ n-1 \end{matrix} \right] = 3{,}182$

$\dfrac{t\,s}{\sqrt{n}} = 0{,}29$

$\boxed{d = 5{,}3 \pm 0{,}3 \quad \text{mm}}$

DIÂMETRO APARENTE
porque as oscilações são superiores ao erro do nónio (±0,2 > 0,1)

A BOLA não é ESFÉRICA

CASO **B**

5,4; 5,3; 5,2; 5,4 mm

$\overline{X} = 5{,}3\,(25)$ mm

s = 0,096

$\left. \begin{matrix} t_{95\%} \\ n-1 \end{matrix} \right] = 3{,}182$

$\dfrac{t\,s}{\sqrt{n}} = 0{,}15\,(2)$

$d = 5{,}3 \pm 0{,}2$ mm

$\boxed{d = 5{,}3\,3 \pm 0{,}15 \text{ mm}}$

NÚMERO INSUFICIENTE DE DETERMINAÇÕES

A BOLA será ESFÉRICA?

2. ANÁLISE DE REGRESSÃO

É o estudo e obtenção de **RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS.**
Pretende-se saber qual a MELHOR ESTIMATIVA dos PARÂMETROS da REGRESSÃO

SIMPLES - Quando uma variável **Y** (**DEPENDENTE**), é função **apenas** de uma variável **X** (**INDEPENDENTE**):

$$\boxed{Y = f(X)}$$

MÚLTIPLA - Quando uma variável **Y** (**DEPENDENTE**), pode ser relacionada com k **VARIÁVEIS INDEPENDENTES**:

$$\boxed{Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_k)}$$

REGRESSÃO LINEAR SIMPLES:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X$$

REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i X_i$$

REGRESSÃO POLINOMIAL DE ORDEM k:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots + \alpha_k X^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i X^i$$

2.1. CÁLCULO DE PARÂMETROS

Consiste em determinar os parâmetros de uma **FUNÇÃO QUE SE AJUSTE** a um conjunto de pontos, utilizando um método de optimização:

- **MÉTODO DA MÁXIMA VEROSIMILHANÇA**
- **MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRÁTICOS**

2.1.1. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRÁTICOS

Minimiza-se a FUNÇÃO constituída pelo
SOMATÓRIO dos QUADRADOS dos DESVIOS

Hipóteses de aplicação:

- **O VALOR MÉDIO DOS ERROS** É **ZERO**.

- Os **ERROS** têm **VARIÂNCIA COMUM**.

- Os **ERROS** são **INDEPENDENTES**.

- Os valores **Y_j PARA CADA VALOR DE X** têm uma **DISTRIBUIÇÃO NORMAL**.

- **Os valores de X são medidos SEM ERRO ou com ERRO DESPREZÁVEL**.

O **MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRÁTICOS** (MMQ) baseia-se na minimização da função:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

y_i - Valor de y encontrado na realização experimental para o valor X_i.

$\hat{Y}_i$ - Valor obtido por substituição de cada X_i na equação da função. É uma estimativa do valor.

2.2. REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_i$$

$\hat{\alpha}_0$ E $\hat{\alpha}_1$ - São estimativas dos verdadeiros valores da **ORDENADA NA ORIGEM** e do **COEFICIENTE ANGULAR**.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i \right) \right]^2$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_0} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1} = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \hat{\alpha}_0 \text{ E } \hat{\alpha}_1$$

2.2.1. COEFICIENTE ANGULAR

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})^2} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

2.2.2. ORDENADA NA ORIGEM

$$\hat{\alpha}_0 = \bar{y} - \hat{\alpha}_1\, \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

2.2.3. VARIÂNCIA DA CORRELAÇÃO LINEAR SIMPLES

- Representa-se por $s_{y.x}^2$ e é uma estimativa da dispersão dos valores em torno da recta $\sigma_{y.x}^2$.

$$s_{y.x}^2 = \frac{\sum \left(y_i - \hat{Y}_i \right)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{\alpha}_0 \sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n-2}$$

n - 2 é o número de graus de liberdade.

É menos 2 porque impomos ao sistema duas restrições: cálculo de $\hat{\alpha}_0$ E $\hat{\alpha}_1$

2.2.4. INTERVALO DE CONFIANÇA DO COEFICIENTE ANGULAR

$$\alpha_1 = \hat{\alpha}_1 \quad \pm \quad t \, \frac{s_{y.x}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}}$$

2.2.5. INTERVALO DE CONFIANÇA DA ORDENADA NA ORIGEM

$$\alpha_0 = \hat{\alpha}_0 \quad \pm \quad t \;\; s_{y.x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}}$$

OU

$$\alpha_0 = \hat{\alpha}_0 \quad \pm \quad t \;\; s_{y.x} \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}}$$

t - factor de student para uma **dada PROBABILIDADE** (95 %) E **n - 2 GRAUS DE LIBERDADE**.

Para simplificar pode usar-se:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}$$

2.2.6. INTERVALOS DE INDETERMINAÇÃO DE Y

❋ Quando reduzimos um conjunto de pontos experimentais (constituídos por pares de valores (**x, y**) A UMA RECTA, normalmente será para obtermos mais tarde quer valores de Y para dados valores de X, quer de X para um dado valor de Y.

Em suma, para efectuarmos **PREVISÃO DE DADOS**.

- Prova-se que, para um dado valor de $\mathbf{x_0}$ se podem encontrar **p** valores de **Y** com um erro:

$$Y_o = \hat{Y}_o \pm t\, s_{y.x} \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_o - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}}$$

n - Número de valores de x, a partir dos quais se define a recta.

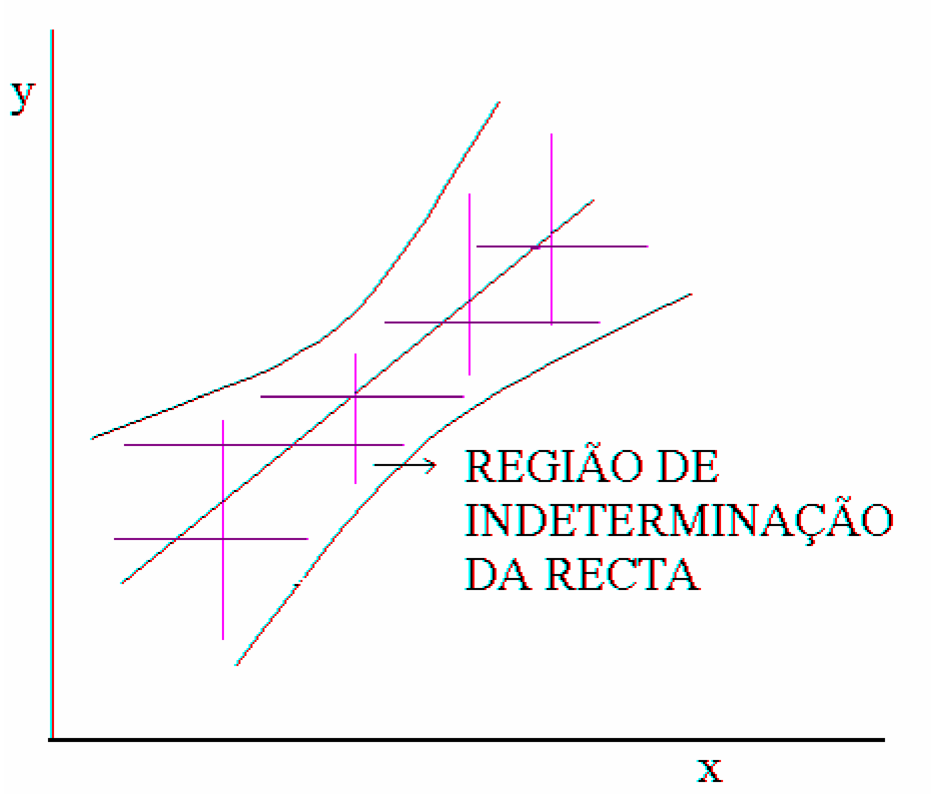
SE **p = 1**

$$Y_o = \hat{Y}_o \pm t\, s_{y.x} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_o - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}}$$

Quanto mais afastado de $\bar{x}$ for o valor de x_o, maior é o erro de Y_o.

SE **p = ∞**

$$Y_o = \hat{Y}_o \pm t\, s_{y.x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_o - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}$$



INTERPOLAÇÃO

Quando se determinam valores de Y, dentro da gama dos valores de X, determinados experimentalmente.

EXTRAPOLAÇÃO

Quando pretendemos determinar valores de X ou Y, fora da gama experimental.

2.2.7. PREVISÃO DE $\hat{X}$ PARA UM DADO VALOR DE Y

Se representarmos, agora, a recta por: $Y = a + b\,X$

Será $\hat{X}_k = \dfrac{Y_k - a}{b}$

E o intervalo de indeterminação do valor estimado de X é:

$$\boxed{X_k = \hat{X}_k \pm t_{(n-2;95\%)}\,\frac{s_{yx}}{b}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(Y_k - \overline{Y}\right)^2}{b^2\,\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}}}$$

Se houver p repetições de Y para um dado valor de X, o intervalo de indeterminação do valor estimado de X ($\hat{X}$), virá:

$$\boxed{X_k = \hat{X}_k \pm t_{(n-2;95\%)}\,\frac{s_{yx}}{b}\sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{\left(Y_k - \overline{Y}\right)^2}{b^2\,\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}}}$$

Notar que, mesmo que se admita que **X NÃO TEM ERRO** para se poder obter a equação da recta, **A PREVISÃO DE UM DADO VALOR DE X_o**, PARA UM VALOR CONHECIDO DE **Y_o**, **JÁ TEM ERRO**.

2.2.8. RECTA QUE PASSA PELA ORIGEM

Neste caso, o parâmetro α_0 é nulo e apenas é necessário determinar α_1

$$Y = \alpha_1' \ x$$

A função a minimizar será:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \alpha_1' \ x \right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_1'} = 0$$

$$\alpha_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \ y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\hat{\alpha}_1' = \alpha_1' \pm t \, s_{y.x} \ \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$s_{y.x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha_1' \ x_i \right)^2}{n - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \alpha_1' \sum_{i=1}^{n} x_i \ y_i}{n - 2}$$

2.2.9. RECTA QUE PASSA POR UM PONTO FIXO

Neste caso: $\qquad Y = C + \alpha_1'' \ x$

em que C é uma constante.

A funçao a minimizar é:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - C - \alpha_1'' \ x \right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_1''} = 0$$

Exemplo:

Na calibração de um espectrofotómetro obtiveram-se os seguintes valores:

C (g/L)	A (λ = 490 mμ)
0,204	0,04
0.306	0,06
0.408	0,08
0,510	0,11
0,612	0,13
0,714	0,15
0,816	0,18
0,918	0,20
1,020	0,23

Sabendo que o espectrofotómetro foi aferido, antes de cada leitura, para o seu valor zero, determine a recta que mais provavelmente representa estes pontos.

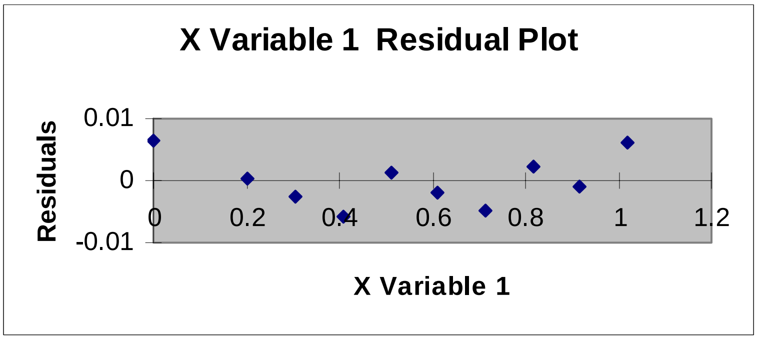
Tools → Data Analysis → Regression

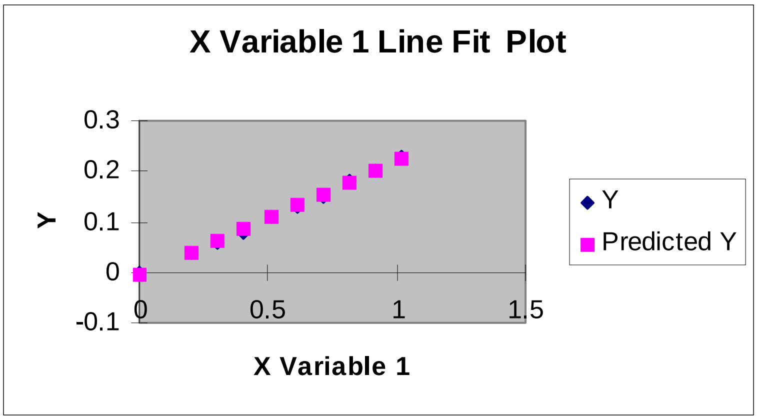
SUMMARY OUTPUT	
Regression Statistics	
Multiple R	0.99845777
R Square	0.996917918
Adjusted R Square	0.996532658
Standard Error	0.004351941
Observations	10

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	1	0.049008485	0.049008	2587.648	2.47042E-11
Residual	8	0.000151515	1.89E-05		
Total	9	0.04916			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
Intercept	**-0.00636364**	0.002805515	-2.26826	0.053034	**-0.0128**	**0.000106**
X Variable 1	**0.225787285**	0.004438609	50.86893	2.47E-11	**0.216**	**0.236**





Obrigando a recta a passar pela origem:

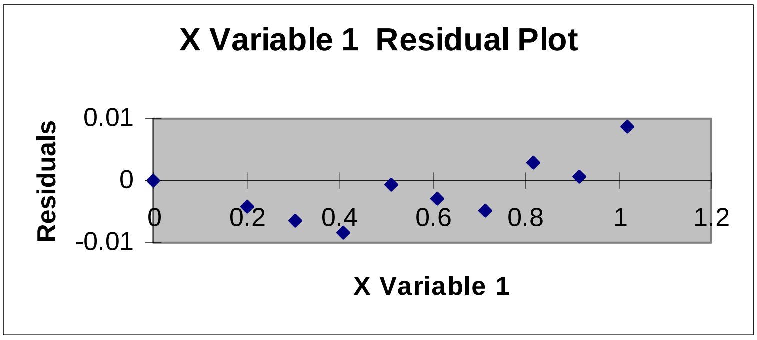
SUMMARY OUTPUT

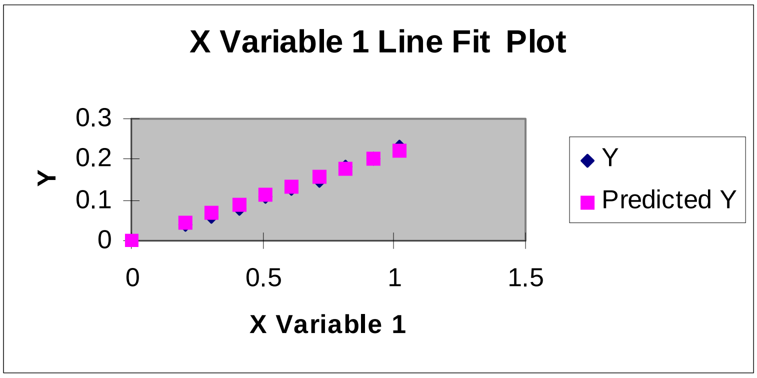
Regression Statistics	
Multiple R	0.997464663
R Square	0.994935754
Adjusted R Square	0.883824643
Standard Error	0.005259471
Observations	10

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	1	0.048911042	0.048911	1768.16485	1.1274E-10
Residual	9	0.000248958	2.77E-05		
Total	10	0.04916			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
Intercept	**0**	#N/A	#N/A	#N/A	**#N/A**	**#N/A**
X Variable 1	**0.217013889**	0.002631336	82.47289	2.8689E-14	**0.211**	**0.223**





2.3. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

A REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA pode ser expressa pela relação:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

$$Y = \sum_{j=0}^{k} \beta_j x_j$$

Os dados consistem em duas matrizes:

❈ - Uma (**nx1**) que contem os valores de Y;

❈ - Outra (**nx(k+1)**) que contem os valores das variáveis independentes

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ x_{0n} & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

em que:

✹ a variável x_0 toma o valor 1.

✹ x_{ij} é o ensaio i da variável x_j.

2.3.1. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRÁTICOS

Minimiza-se a função do somatório dos quadrados dos desvios:

$$SRM = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}\right)\right]^2$$

A igualização a zero das derivadas em ordem aos parâmetros:

$$\frac{\partial SRM}{\partial \beta_0} = 0$$
$$\frac{\partial SRM}{\partial \beta_1} = 0$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\frac{\partial SRM}{\partial \beta_k} = 0$$

conduz ao sistema de **(k+1)** equações lineares, a partir do qual é possível determinar os parâmetros:

$$\begin{cases} \beta_0 \sum x_0\, x_0 + \beta_1 \sum x_0\, x_1 + \cdots + \beta_k \sum x_0\, x_k = \sum x_0\, y \\ \beta_0 \sum x_1\, x_0 + \beta_1 \sum x_1\, x_1 + \cdots + \beta_k \sum x_1\, x_k = \sum x_1\, y \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_0 \sum x_k\, x_0 + \beta_1 \sum x_k\, x_1 + \cdots + \beta_k \sum x_k\, x_k = \sum x_k\, y \end{cases}$$

em que:

$$\sum x_j\, x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2$$

$$\sum x_j\, x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, x_{ik}$$

$$\sum x_j\, y = \sum_{i=1}^{n} x_{ji}\, y_i$$

Em notação matricial será:

$$X^T X B = X^T Y \qquad \text{em que} \qquad B = \left[\beta_0 \;\; \beta_1 \;\; \cdots \;\; \beta_k\right]$$

$$\text{Se} \quad \left| \begin{array}{l} X^T X = A \\ \\ X^T Y = G \end{array} \right. \quad \Big| \Rightarrow \quad \text{O SISTEMA SERÁ} \quad \Big| \; A B = G$$

Resolvendo vem:

$$B = A^{-1} G$$

em que A^{-1} é a matriz inversa da matriz $A = X^T X$

2.3.2. DESVIO PADRÃO

$$s_{(y.x)m} = \sqrt{\frac{SRM}{n - (k+1)}}$$

2.3.3. INTERVALOS DE CONFIANÇA DOS PARÂMETROS

$$\beta_i = \hat{\beta}_i \pm t \, s_{(y.x)m} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}}$$

em que **t** é o factor de Student para uma dada probabilidade (95 %) e (**n-(k+1)**) graus de liberdade.

2.3.4. INTERVALO DE INDETERMINAÇÃO DA CURVA

$$Y_o = \hat{Y}_o \pm t\, s_{(y.x)m} \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \sum_h \sum_j \frac{\left(x_{oh} - \bar{x}_h\right)\left(x_{oj} - \bar{x}_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ih} - \bar{x}_h\right)\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)}}$$

em que:

p - é o número de determinações de y para cada conjunto de variáveis (x_1, ..., x_k).

n - é o número depontos usados para definir a curva.

k - é o número de variáveis independentes.

2 VARIÁVEIS

SE **p**=1

$$Y_o = \hat{Y}_o \pm t\, s_{(y.x)m} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{o1} - \bar{x}_1\right)\left(x_{o2} - \bar{x}_2\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1} - \bar{x}_1\right)\left(x_{i2} - \bar{x}_2\right)}}$$

3 VARIÁVEIS

SE **p**=1

$$Y_o = \hat{Y}_o \pm t\, s_{(y.x)m} \sqrt{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{o1} - \bar{x}_1\right)\left(x_{o2} - \bar{x}_2\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1} - \bar{x}_1\right)\left(x_{i2} - \bar{x}_2\right)} + \frac{\left(x_{o1} - \bar{x}_1\right)\left(x_{o3} - \bar{x}_3\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1} - \bar{x}_1\right)\left(x_{i3} - \bar{x}_3\right)} + \\ + \frac{\left(x_{o2} - \bar{x}_2\right)\left(x_{o3} - \bar{x}_3\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i2} - \bar{x}_2\right)\left(x_{i3} - \bar{x}_3\right)} \end{array}}$$

2.4. REGRESSÃO POLINOMIAL

A regressão polinomial representa-se:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_k X^k$$

$$Y = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j X^j$$

e pode transformar-se em:

$$Y = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j X_j \qquad \text{EM QUE} \qquad X^i \equiv X_i$$

Assim o tratamento fica em tudo idêntico ao da regressão linear múltipla.

2.4.1. REGRESSÃO QUADRÁTICA

Se representarmos, agora, a regressão quadrática por:

$$Y = a + b\,X + c\,X^2$$

Os parâmetros serão calculados pelo método dos mínimos quadráticos.

VARIÂNCIA DA REGRESSÃO QUADRÁTICA

$$s^2_{(y.x)2} = \frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{n - 3}$$

2.4.1.1. TESTE DE LINEARIDADE

Se $$DS^2 = (n-2)\,s^2_{yx} - (n-3)\,s^2_{(yx)2}$$, com 1 grau de liberdade.

Em que $$s^2_{y.x} = \frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{n-2}$$ é a variância da correlação linear.

O coeficiente de linearidade é definido por:

$$LC = \frac{DS^2}{s^2_{(yx)2}}$$

Comparando LC com o factor F determinado para GL1 do numerador e GL2 do denominador e para 95 % de probabilidade, se:

LC < F a função é linear

LC > F a função é quadrática

2.4.1.2. ESTIMATIVA DE X PARA UM DADO VALOR DE Y

Curvatura positiva $$\hat{X} = \frac{b}{2c} + \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a - \hat{Y}}{c}}$$

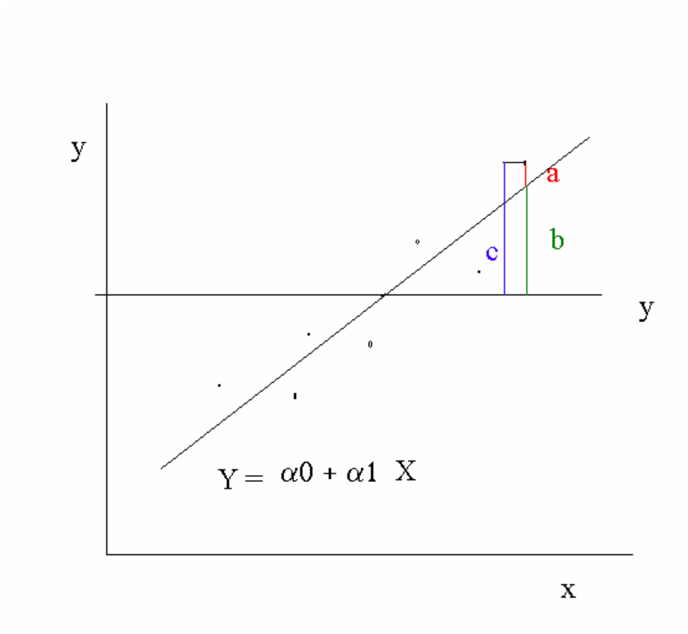
Curvatura negativa $$\hat{X} = \frac{b}{2c} - \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a - \hat{Y}}{c}}$$

E o intervalo de confiança do valor estimado de X é:

$$X_k = \hat{X}_k \pm s_{(yx)2}\, t_{n-3;\,0,95}\, \frac{1}{\left(b + 2\,c\,\hat{X}_k\right)}$$

3. ANÁLISE DE VARIÂNCIA

3.1. ANÁLISE DE VARIÂNCIA DA REGRESSÃO LINEAR SIMPLES



Se não houver qualquer relação entre as variáveis **X** e **Y**, as medições de **Y** conduziriam a um valor mais provável que, à parte o erro absoluto, seria representado pelo **VALOR MÉDIO** $\overline{Y}$**.**

Poderíamos, portanto, dizer que a variância associada seria :

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad c$$

c – Representa o valor dos desvios dos dados experimentais em relação ao valor médio

Verifica-se que a soma $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$ é decomponível em duas parcelas:

$$c \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 \quad \left\langle \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - Y_i\right)^2 & \Leftrightarrow \quad a \\ \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{y}\right)^2 & \Leftrightarrow \quad b \end{array} \right.$$

a – Representa o desvio dos valores experimentais em relação aos valores da recta.

b - **ASSOCIADO À REGRESSÃO** - desvios da recta em relação ao valor médio

Com base nestes desvios é possível efectuar **a ANÁLISE DE VARIÂNCIA** que nos permite determinar **o GRAU DE AJUSTE** da recta aos pontos experimentais.

ANÁLISE DE VARIÂNCIA DA REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	QUADRADOS DOS DESVIOS (Q. D.)	VARIÂNCIAS OU MÉDIAS QUADRÁTICAS (M. Q.)	F
DESVIOS DA REGRESSÃO EM RELAÇÃO AO VALOR MÉDIO DE Y ($\bar{y}$)	1*	$\sum(Y_i - \bar{y})^2 = \dfrac{\sum\left[(x_i - \bar{x})(y - \bar{y})\right]^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$	$MQR = \dfrac{\sum(Y_i - \bar{y})^2}{1}$	$F = \dfrac{MQR}{s_{y.x}^2}$
DESVIOS DOS VALORES EXPERIMENTAIS EM RELAÇÃO AOS RESPECTIVOS VALORES DA CORRELAÇÃO	n-2	$\sum(y_i - Y_i)^2 = \sum y_i^2 - \alpha_0 \sum y_i - \alpha_1 \sum x_i y_i$	$s_{y.x}^2 = \dfrac{\sum(y_i - Y_i)^2}{n - 2}$	
TOTAL - DESVIOS DOS VALORES EXPERIMENTAIS EM RELAÇÃO AO VALOR MÉDIO DE y ($\bar{y}$)	n-1	$\sum(y_i - \bar{y})^2$	$s_y^2 = \dfrac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n - 1}$	

* - depois de determinada a equação da recta, os valores da recta apenas têm **1 GL**, pois para cada x_i, há apenas um valor de Y_i e um valor de $\bar{y}$.

O quociente $F = \frac{MQR}{s^2_{y.x}}$ permite-nos determinar com que probabilidade a correlação **SE AJUSTA** aos pontos experimentais, comparando o seu valor com valores tabelados que dependem **DA PROBABILIDADE DE AJUSTE E DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DO NUMERADOR E DO DENOMINADOR**.

3.1.1. MEDIÇÕES DE Y REPETIDAS PARA UM DADO VALOR DE X

Quando para cada valor de X, se efectuam várias medições de Y, a análise de variância é diferente:

✿ Dividem-se os desvios dos valores experimentais em relação aos valores da recta, em duas partes:

$$a \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - Y_i\right)^2 \left\langle \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 & \Leftrightarrow \quad a_1 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i - Y_i\right)^2 & \Leftrightarrow \quad a_2 \end{array} \right.$$

a_1 – Representa o desvio de cada valor repetido de y, em relação à média de y, para cada valor de x.

a_2 – Representa o desvio das médias ($\bar{y}_i$), para cada valor de x, em relação à correlação.

ANÁLISE DE VARIÂNCIA DA REGRESSÃO LINEAR SIMPLES PARA MEDIÇÕES REPETIDAS

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	QUADRADOS DOS DESVIOS (Q. D.)	VARIÂNCIAS OU MÉDIAS QUADRÁTICAS (M. Q.)	F
DESVIOS DA REGRESSÃO EM RELAÇÃO AO VALOR MÉDIO DE y ($\bar{y}$)	1	$\sum\left(Y_i - \bar{y}\right)^2$	$MQR = \dfrac{\sum\left(Y_i - \bar{y}\right)^2}{1}$	$F = \dfrac{MQM}{MQD}$
DESVIOS DE CADA VALOR REPETIDO DE y, EM RELAÇÃO AO VALOR MÉDIO DE y, PARA CADA VALOR DE x.	SOMA DOS G.L. DE CADA CONJUNTO $\sum_i \left(\sum_j n_{ij} - 1\right)$	$\sum_i \sum_j \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2$	$MQD = \dfrac{\sum_i \sum_j \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{\sum_i \left(\sum_j n_{ij} - 1\right)}$	
DESVIOS DAS MÉDIAS DE y, PARA CADA x, EM RELAÇÃO AOS RESPECTIVOS VALORES DA CORRELAÇÃO	Nº DE MÉDIAS - 2 M-2	$\sum\left(\bar{y}_i - Y_i\right)^2$	$MQM = \dfrac{\sum\left(\bar{y}_i - Y_i\right)^2}{M - 2}$	
TOTAL	n-1	$\sum \sum\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2$	$s_y^2 = \dfrac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n - 1}$	

Neste caso é o valor do quociente $\left(\frac{MQM}{MQD}\right)$ que vamos comparar com os valores das tabelas de **F** que nos permite determinar a probabilidade do **AJUSTE** ou **FALTA DE AJUSTE** da correlação aos pontos experimentais.

Exemplo:

Na determinação da massa específica de um óleo a diferentes temperaturas, obtiveram-se os seguintes valores:

ρ / g cm^{-3}	ϕ / ºC
0,906 0,905 0,907	14,0
0,894 0,892 0,893	23,0
0,884 0,886	32,9
0,876 0,877 0,875	41,9
0,866 0,868	52,4

a) Determinar a melhor aproximação, sob o ponto de vista estatístico, da correlação linear $\rho = \rho(\phi)$.
b) Determinar o valor da massa específica a 25 ºC, e o respectivo erro.
c) Efectuar a análise de variância.

R:
a) $\rho = (0{,}918 \pm 0{,}003) + (-1{,}00 \pm 0{,}09) \times 10^{3}\ \phi$

b) $Y_o = \hat{Y}_o \pm 4{,}184 \times 10^{-3} \sqrt{1 + \frac{1}{13} + \frac{(x_o - 31{,}28)^2}{2324{,}54}}$; $\rho_{25ºC} = (0{,}893 \pm 0{,}004)$ gcm^{-3}

c) Ajuste superior a 99 %.

3.2. ANÁLISE DE VARIÂNCIA NA REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	QUADRADOS DOS DESVIOS (Q. D.)	VARIÂNCIAS OU MÉDIAS QUADRÁTICAS (M. Q.)	F
DESVIOS DA REGRESSÃO EM RELAÇÃO AO VALOR MÉDIO DE y ($\bar{y}$)	k	$SSR = \sum\left(Y_i - \bar{y}\right)^2$	$MQR = \dfrac{\sum\left(Y_i - \bar{y}\right)^2}{k}$	$F = \dfrac{MQR}{s^2_{(y.x)m}}$
DESVIOS DOS VALORES EXPERIMENTAIS EM RELAÇÃO AOS RESPECTIVOS VALORES DA CORRELAÇÃO	n-2	$SRM = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{ij}\right]^2$	$s^2_{(y.x)m} = \dfrac{\sum\left(y_i - Y_i\right)^2}{n - (k+1)}$	
TOTAL	n-1	$\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2$	$s^2_y = \dfrac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n - 1}$	

4. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS

✸ Associado ao estudo de um determinado sistema, existem as **VARIÁVEIS** que podem ser manipuladas, **INDEPENDENTES** ENTRE SI, e uma ou mais **VARIÁVEIS DE RESPOSTA** que se pretende estudar.

✸ A par destas variáveis existem outras, ditas **VARIÁVEIS DE RUÍDO**, que variam de uma forma não controlada.

✸ Devido ao carácter aleatório das variáveis de ruído (acidentais), a (s) variável (veis) de resposta é (são) também **ALEATÓRIA** (S).

✸ $\Rightarrow$ é necessário usar **TÉCNICAS ESTATÍSTICAS** no estudo da relação entre as variáveis dependentes e as variáveis independentes.

✸ Normalmente o **EXPERIMENTALISTA NÃO PODE CONTROLAR TODAS AS VARIÁVEIS** que influenciam as variáveis de resposta.

✸ Depois de seleccionadas as variáveis independentes, deve determinar-se, em face ou não de qualquer experiência, O **NÚMERO DE ENSAIOS** e a **SEQUÊNCIA DOS MESMOS**, tendo em atenção um determinado ERRO FINAL, e **SELECCIONAR O EQUIPAMENTO** que nos permita atingir o fim em vista.

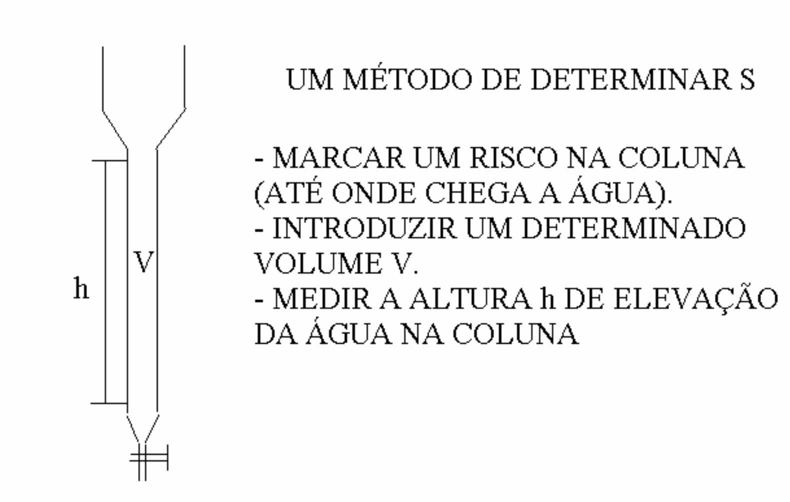
✸ neste caso, normalmente, os erros aleatórios associados à(s) variável (veis) de resposta não são independentes, e as técnicas estatísticas habituais não podem ser aplicadas. temos que usar a **ALEATORIZAÇÃO OU FACTORIZAÇÃO**.

4.1. SELECÇÃO DE EQUIPAMENTO

Vejamos **um exemplo muito simples** que nos permite verificar como o uso de vários instrumentos ou métodos de medida influenciam o erro do resultado final.

✷ Pretende-se determinar a secção recta de uma coluna de lixiviação laboratorial com um erro inferior a 0,1 %.

$$\varepsilon_S \leq 0{,}1\ \%$$



$$S = \frac{V}{h}$$

A olho pode ter-se uma ideia de que o diâmetro da coluna é da ordem de $\phi \cong 1{,}6$ cm $\Rightarrow$ $S \cong 2\ cm^2$.

Portanto:

$$\text{A OLHO} \left| \begin{array}{l} S \cong 2\ cm^2 \\ V \cong 100\ cm^3 \\ h \cong 50\ cm \end{array} \right.$$

Que instrumento de medida vamos utilizar para medir **V** e **h**?

Como $S = \dfrac{V}{h} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{\sigma_S}{S}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_h}{h}\right)^2$

Pelo princípio dos **EFEITOS IDÊNTICOS**:

Baseados no limite superior do erro, poderíamos, em 1ª aproximação que:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_h \leq 0{,}05\ \%$$

Além disso, relembremos que: $\Delta Q = 2\ \sigma_Q$

1ª Hipótese: RÉGUA + PROVETA

RÉGUA: $\Delta R = O{,}5$ mm $\Rightarrow$ $\Delta h = 2 \times 0{,}05$ cm $\Rightarrow$ $\varepsilon_h = {}^{0{,}1}/_{50} = 0{,}2\ \%$

$\downarrow$

(TEMOS DE ACERTAR EM DOIS TRAÇOS)

PROVETA: $\Delta P = O{,}5\ cm^3 \Rightarrow \Delta V = O{,}5\ cm^3 \Rightarrow \varepsilon_V = {}^{0{,}5}/_{100} = 0{,}5\ \%$

$$\left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 = \left(\frac{0{,}25}{100}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{50}\right)^2$$

$$\varepsilon_S = 0{,}5\ \% \qquad > \qquad 0{,}1\ \%$$

TEMOS QUE MELHORAR AS DUAS MEDIÇÕES

2ª Hipótese: RÉGUA + BALÃO GRADUADO

RÉGUA: $\Delta R = O{,}5$ mm $\Rightarrow$ $\Delta h = 2 \times 0{,}05$ cm $\Rightarrow$ $\varepsilon_h = 0{,}1/50 = 0{,}2\ \%$

BALÃO GRADUADO: $\Delta B = O{,}2\ cm^3 \Rightarrow \Delta V = O{,}2\ cm^3 \Rightarrow$

$$\varepsilon_V = 0{,}2/100 = 0{,}2\ \%$$

$$\left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 = \left(\frac{0{,}1}{100}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{50}\right)^2$$

$$\varepsilon_S = 0{,}28\ \% \qquad > \qquad 0{,}1\ \%$$

É NECESSÁRIO UTILIZAR OUTROS MEIOS DE MEDIÇÃO, TANTO PARA O VOLUME COMO PARA A ALTURA

3ª Hipótese: CATETÓMETRO + BALANÇA

CATETÓMETRO: $\Delta CAT = 0{,}02$ mm $\Rightarrow$ $\Delta h = 0{,}002$ cm $\Rightarrow$

$$\varepsilon_h = 0.002/50 = 0{,}004\ \%$$

(Agora não se multiplica o erro do catetómetro por 2, para se obter o erro na altura, uma vez que com o catetómetro medimos diferenças de alturas)

BALANÇA: vamos medir o volume através da medição da massa.

$$V = \frac{M}{\rho_{H_2O}} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta V = 1/\rho_{H_2O}\ \Delta M$$

$$\Delta B = 0{,}00005\ g \qquad \Delta M = 2 \times 0{,}00005 = 0{,}0001\ g$$

$$\Delta V = \frac{0{,}0001}{0{,}99823} \cong 0{,}0001\ cm^3 \quad \Rightarrow \varepsilon_V = \frac{0{,}0001}{100} = 0{,}0001\ \%$$

$$\varepsilon_S = 0{,}004\ \% \qquad <<< \qquad 0{,}1\ \%$$

NÃO É NECESSÁRIO TANTO RIGOR

4ª Hipótese: RÉGUA COM NÓNIO + BALANÇA

4ªA <u>RÉGUA COM NÓNIO DE 1/20 mm</u>: $\Delta RN = O{,}025\ mm \Rightarrow$

$$\Delta h = 2 \text{ x } 0{,}0025 \text{ cm} \Rightarrow \varepsilon_h = {}^{0.005}\!/_{50} = 0{,}01\,\%$$

$$\varepsilon_S = 0{,}01\,\% \quad < \quad 0{,}1\,\%$$

4ªB <u>RÉGUA COM NÓNIO DE 1/10 mm</u>: $\Delta RN = O{,}05\ mm \Rightarrow$

$$\Delta h = 2 \text{ x } 0{,}005 \text{ cm} \Rightarrow \varepsilon_h = {}^{0{,}01}\!/_{50} = 0{,}02\,\%$$

$$\varepsilon_S \cong 0{,}02\,\% \quad < \quad 0{,}1\,\%$$

Podemos **LEVAR O RIGOR** onde quisermos, se dispusermos de **MATERIAL ADEQUADO**

4.2. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS ATENDENDO À ESTATÍSTICA

4.2.1. SEM APOIO EM ENSAIOS PRÉVIOS

Neste caso podemos dizer que, **no máximo**, os desvios são todos de

± 1/2 DA MENOR DIVISÃO DA ESCALA

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{n\,(\Delta x)^2}{n-1}} \qquad \Delta x = \frac{t\,s}{\sqrt{n}} \qquad \boxed{n = t^2 + 1}$$

Exemplo: Pretende-se medir um comprimento de ≅ 20 cm com uma régua graduada em mm. (o aparelho de medida tinha sido inicialmente seleccionado)

$\Delta L = \pm$ 0,5 mm

$$s^2_{max} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1,n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n\,0{,}5^2}{n-1} = 0{,}25\,\frac{n}{n-1}$$

Podemos construir a tabela:

n	t (n-1)	s^2	s	t s	$t\,s/\sqrt{n}$	ε (%)	t^2+1
3	4,303	0,375	0,612	2,63	1,52	7,60	19,51
5	2,776	0,313	0,559	1,55	0,69	3,45	8,71
7	2,447	0,292	0,540	1.32	0,50	2,50	6,99
9	2,306	0,281	0,530	1.22	0,41	2.05	6,32
41	2,021	0,256	0,506	1,02	0,16	0,80	
61	2,000	0,254	0,504	1,01	0,13	0,65	

Não temos mais que comparar os valores da tabela com o erro por nós pretendido e decidir do número de ensaios a executar.

Verificar que:

① Com n=7 encontramos um erro absoluto da ordem do erro do instrumento de medida

② Quando aumentamos o número de ensaios de 41 → 61 apenas aumentamos o rigor de 0,16 para 0,13 (erro absoluto) ou 0,80 → 0.65 (erro relativo).

③ A influência é muito maior para valores baixos do número de ensaios, porque é aqui que existe uma grande variação do factor de Student e da razão n / (n-1).

4.2.2. COM APOIO EM ENSAIOS PRÉVIOS

Partindo do conhecimento do desvio standard (padrão) de **m** experiências:

$$s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1,m} (x_i - \bar{x})^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \bar{x} \pm \frac{t\,s}{\sqrt{m}}$$

o que nos permite determinar o erro relativo:

$$\varepsilon = \frac{t\,s}{\sqrt{m}} \, \frac{1}{\bar{x}}$$

se este erro é superior ao erro pretendido é necessário efectuar um número de experiências maior.

Admitindo que $\sum (x_i - \bar{x})^2$ é proporcional ao número de experiências:

Nº exp = m $\Rightarrow$ $\sum (x_i - \bar{x})^2 = A$

Nº exp = k $\Rightarrow$ $\sum (x_i - \bar{x})^2 = (k/m)\,A$

E virá, portanto:

$$s_k^2 = \frac{1}{k-1} (m-1) \frac{k}{m} s_m^2$$

Exemplo: No laboratório obtiveram-se os seguintes valores de viscosidade de um líquido, à temperatura de 25 ºC, determinar o número de medições da viscosidade de modo a que o erro seja inferior a 2 %.

μ (cp)
35
36
35
34
36

$\Rightarrow \bar{\mu} = 35{,}2$ cp

R: 8 determinações.

4.3. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS EM MEDIDAS INDIRECTAS

✪ Suponhamos que pretendemos determinar o valor mais provável de uma grandeza medida indirectamente **COM UM DETERMINADO ERRO**.

✪ Pretende-se saber quais os valores **dos ERROS** permitidos na medição directa das **GRANDEZAS INDEPENDENTES**.

✪ **NÃO HÁ UMA ÚNICA RESPOSTA PARA ESTA QUESTÃO**.

✪ **Admite-se** que os erros de cada medição directa **CONTRIBUEM IGUALMENTE** para o erro da variável dependente:

4.3.1. Atendento ao limite superior do erro

Erros absolutos:

$$\Delta Q = n \left|\frac{\partial f}{\partial q_1}\right| \Delta q_1 = n \left|\frac{\partial f}{\partial q_2}\right| \Delta q_2 = \ldots = n \left|\frac{\partial f}{\partial q_n}\right| \Delta q_n$$

Erros relativos:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = n\,|\alpha_1| \frac{\Delta q_1}{q_1} = n\,|\alpha_2| \frac{\Delta q_2}{q_2} = \ldots = n\,|\alpha_n| \frac{\Delta q_n}{q_n}$$

4.3.2. Atendento ao valor mais provável do erro

Erros absolutos:

$$\boxed{\sigma_Q^2 = n\,\alpha_1^2\,\sigma_{q_1}^2 = n\,\alpha_2^2\,\sigma_{q_2}^2 = \ldots = n\,\alpha_n^2\,\sigma_{q_n}^2}$$

Erros relativos:

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right)^2 = n\,\alpha_1^2 \left(\frac{\sigma_{q_1}}{q_1}\right)^2 = n\,\alpha_2^2 \left(\frac{\sigma_{q_2}}{q_2}\right)^2 = \ldots = n\,\alpha_n^2 \left(\frac{\sigma_{q_n}}{q_n}\right)^2}$$

É o **PRINCÍPIO DOS EFEITOS IDÊNTICOS**

Excepções:

✪ Sempre que uma grandeza é **mais difícil de obter** com precisão, deve desviar-se este princípio de modo que **a contribuição das outras seja muito menor que a dessa grandeza**.

✪ Há igualmente grandezas que podem ser medidas com uma **grande precisão**. mas, contribuindo essas grandezas para a determinação de uma juntamente com outras que não podem ser medidas senão com uma precisão muito menor, não é necessário medir a primeira com a precisão que pode dar, **deslocando-se, no entanto, o princípio dos efeitos idênticos**.

4.4. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS NA CORRELAÇÃO LINEAR SIMPLES

4.4.1. SEM APOIO EM ENSAIOS PRÉVIOS

4.4.1.1. Resposta no eixo das ordenadas Δy

O intervalo de confiança da resposta, no eixo das ordenadas, prevista Y_o é:

$$\boxed{Y_o = \hat{Y}_o \pm t_{n-2}\, s_{y.x} \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_o - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_o - \bar{x}\right)^2}}} \quad \text{com} \quad \boxed{s_{y.x} = \sqrt{\frac{n\,(\Delta y)^2}{n-2}}}$$

Assim, o erro associado ao valor da previsão depende do valor x_o escolhido.

Em programação considera-se que $x_o = \bar{x}$:

$$\boxed{Y_o = \hat{Y}_o \pm t_{n-2}\, s_{y.x} \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{n}}}$$

Ou seja:

$$\boxed{\Delta Y_{central} = t_{n-2}\, s_{y.x} \sqrt{\frac{n+p}{np}}}$$

4.4.1.2. Resposta no declive $\Delta\alpha_1$

$$\boxed{\Delta\alpha_1 \approx t_{n-2}\, s_{y.x} \frac{1}{\sqrt{n\left(\dfrac{x_{max} - x_{min}}{4}\right)^2}}}$$

Construindo uma tabela idêntica à que foi construída para medições independentes, podemos determinar o número de pontos para definir uma recta com um determinado rigor.

1º Determinar p

2º Determinar n:

Nº de pontos n	t_{n-2}(95 %)	$s_{y.x}=\sqrt{\frac{n(\Delta y)^2}{n-2}}$	Erro absoluto $\Delta Y_{central}=t_{n-2}\, s_{y.x}\sqrt{\frac{n+p}{np}}$ ou $\Delta\alpha_1 \approx t_{n-2}\, s_{y.x}\frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{x_{max}-x_{min}}{4}\right)^2}}$	Erro relativo em y ou em α_1 (%)	$\frac{\Delta\ reg}{\Delta\ prop}$
(p.e) 7	--	--	--	--	
(p.e.) 10	--	--	--	--	
(p.e.) 12	--	--	--	--	

4.4.2. COM APOIO EM ENSAIOS PRÉVIOS

Neste caso já temos conhecimento dos valores de s_{yx}^2 para **k** experiências, com valores de ordenadas:

$$s_{yx_k}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{k-2}$$

De igual modo, para j experiências posteriores, teremos:

$$s_{yx_j}^2 = \frac{k-2}{j-2} \, \frac{j}{k} \, s_{yx_k}^2$$

4.5. PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS EM CORRELAÇÕES NÃO LINEARES

Como método aproximado, divide-se a curva em vários troços de tal modo que o erro introduzido pela substituição de um troço curvo por uma recta não seja muito grande.

É de seguida possível aplicar o procedimento anterior.

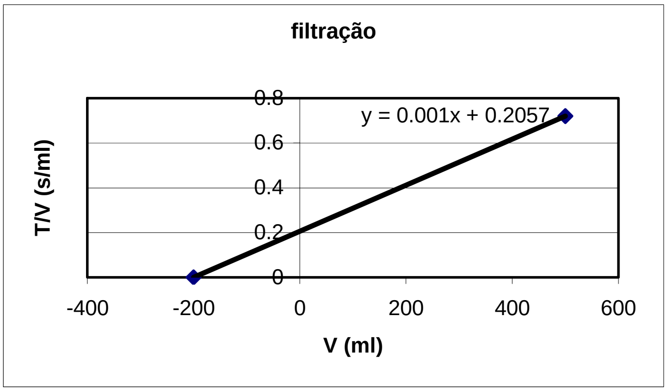
4.6. EXEMPLOS DE PROGRAMAÇÃO DE ENSAIOS

4.6.1. Um exemplo para o trabalho de Filtração

Determinar o nº de pontos de cada recta de filtração (intervalos de leitura de V e t).

Critério: Obtenção de um erro aceitável para o declive na zona média.

Suponhamos que temos a seguinte recta de filtração: $y = t/V = \alpha_1 x + b$



$$\alpha_1 = \left(\frac{t}{V} - b\right) / x$$

				1000	2000	1000	2000	1000	2000
				Δ	Δ	σ	σ	Δ	Δ
Volume de filtrado total, Vt (mL)	**1000**	**2000**		10	10	5	5		
Volume intermédio de filtrado, V (mL)	**500**	**1000**		10	10	5	5		
Tempo de filtração respectivo, t (s)	**360**		**1205.7**	0.05	0.05	0.025	0.025		
Valor intermédio de t/V	**0.72**	**1.206**				0.0072	0.0060	0.0144	0.0121
Valor intermédio de t/V - b	**0.514**	**1**				0.0072	0.0060	0.0144	0.0121

Δprop:

$$\left(\frac{\Delta_{\alpha 1}}{\alpha 1}\right)^2 = \left(\frac{\Delta_{t/V-b}}{t/V - b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2$$

$$\left(\Delta_{t/V-b}\right)^2 = \left(\Delta_{t/V}\right)^2 + \left(\cancel{\Delta_b}\right)^2$$

$$\left(\frac{\Delta_{t/V-b}}{t/V - b}\right)^2 = \left(\frac{\Delta_{t/V}}{t/V - b}\right)^2$$

$$\left(\frac{\Delta_{t/V}}{t/V}\right)^2 = \left(\frac{\Delta_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_V}{V}\right)^2$$

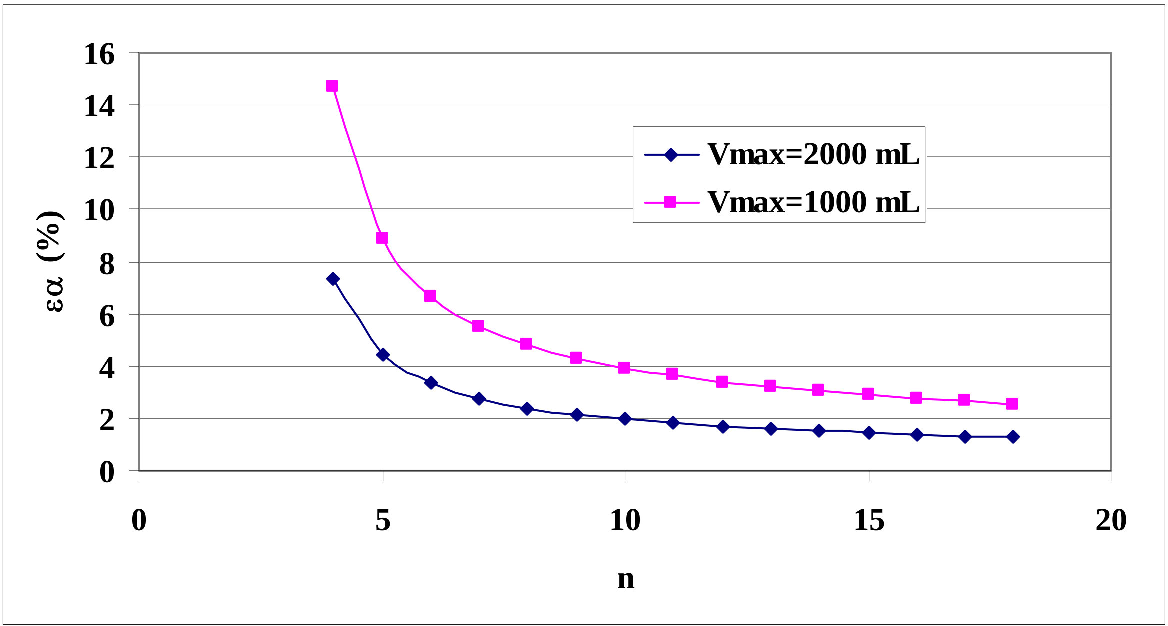
	1000 mL	2000 mL
Δprop (α1) =	3.44E-05	1.57E-05

Δreg:

$$\Delta\alpha_1 \approx t_{n-2}\, s_{y.x} \frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{x_{max}-x_{min}}{4}\right)^2}}$$

$$s_{y.x} = \sqrt{\frac{n\,(\Delta y)^2}{n-2}}$$

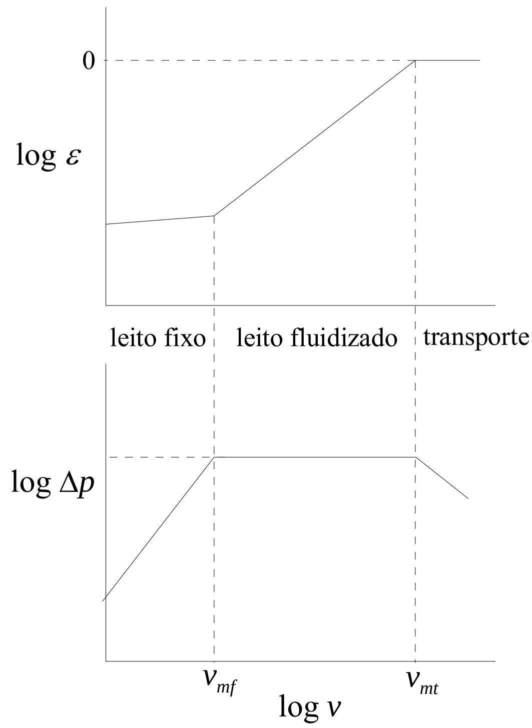
			Vmax = 2000			Vmax = 1000		
n	tn-2 (95%)	Syx	Δa (reg)	εa (%)	Δreg/Δprop	Δa (reg)	εa (%)	Δreg/Δprop
3	12.7062	0.020884	3.06E-04	30.64	19.56	6.13E-04	61.28	17.81
4	4.3027	0.017051	7.34E-05	7.34	4.68	1.47E-04	14.67	4.26
5	3.1824	0.015566	4.43E-05	4.43	2.83	8.86E-05	8.86	2.58
6	2.7764	0.014767	3.35E-05	3.35	2.14	6.70E-05	6.70	1.95
7	2.5706	0.014266	2.77E-05	2.77	1.77	5.54E-05	5.54	1.61
8	2.4469	0.013922	2.41E-05	2.41	1.54	4.82E-05	4.82	1.40
9	2.3646	0.013671	2.16E-05	2.16	1.38	4.31E-05	4.31	1.25
10	2.3060	0.013480	1.97E-05	1.97	1.26	3.93E-05	3.93	1.14
11	2.2622	0.013330	1.82E-05	1.82	1.16	3.64E-05	3.64	1.06
12	2.2281	0.013208	1.70E-05	1.70	1.08	3.40E-05	3.40	0.99
13	2.2010	0.013107	1.60E-05	1.60	1.02	3.20E-05	3.20	0.93
14	2.1788	0.013023	1.52E-05	1.52	0.97	3.03E-05	3.03	0.88
15	2.1604	0.012951	1.44E-05	1.44	0.92	2.89E-05	2.89	0.84
16	2.1448	0.012890	1.38E-05	1.38	0.88	2.76E-05	2.76	0.80
17	2.1314	0.012836	1.33E-05	1.33	0.85	2.65E-05	2.65	0.77
18	2.1199	0.012788	1.28E-05	1.28	0.82	2.56E-05	2.56	0.74



4.6.2. Um exemplo para o trabalho de Transporte Pneumático

Determinar o nº de pontos das rectas log ε = f (log v).

Critério: Obtenção de um erro aceitável para v_{mt} (velocidade mínima de transporte.



$$\varepsilon = 1 - \frac{(1-\varepsilon_0).L_0}{L}$$

L_0 = 0.12 m ΔL_0 = 0.02 m

L = 0.70 m   ΔL = 0.05 m

$\varepsilon_0 = 1 - \rho_{ap}/\rho_s$ é a porosidade inicial do leito fixo

$$v = C \cdot \sqrt{\frac{2\,\Delta p_o}{\rho\,(\beta'^4 - 1)}}$$

$\beta' = D/D_o$ - razão entre os diâmetros da tubagem e do orifício

C(β') - coeficiente de descarga do orifício C ≈ 0,61

Δprop:

$$\boxed{(\Delta\,\varepsilon)^2 = \left(\Delta\left(\frac{(1-\varepsilon_0)\,L_0}{L}\right)\right)^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{\Delta\left(\frac{(1-\varepsilon_0)\,L_0}{L}\right)}{\frac{(1-\varepsilon_0)\,L_0}{L}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\,(1-\varepsilon_0)}{1-\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\,L_0}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\,L}{L}\right)^2}$$

$$\boxed{(\Delta\,(1-\varepsilon_0))^2 = (\Delta\,\varepsilon_0)^2 = \left(\Delta\frac{\rho_{ap}}{\rho_s}\right)^2}$$

$$(\sigma(\ln\varepsilon))^2 = \left(\frac{\partial(\ln\varepsilon)}{\partial\ \varepsilon}\right)(\sigma\varepsilon)^2$$

$$\Delta(\ln\ \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\Delta\ \varepsilon$$

$$(\Delta(\log\varepsilon)) = \left(\frac{\log e}{\varepsilon}\right)(\Delta\varepsilon)$$

$$\boxed{\Delta Y = \Delta \log \varepsilon = 0.01062}$$

Δ reg:

$$\Delta Y_{central} = t_{n-2}\ s_{y.x}\sqrt{\frac{n+p}{np}}$$

$$s_{y.x} = \sqrt{\frac{n(\Delta y)^2}{n-2}}$$

				p=1				p=7	
n	**t_{n-2} (95%)**	**Syx**	**$(\Delta \log \varepsilon)_{central}$**	**ε(log ε) (%)**	**Δreg/Δprop**		**$(\Delta \log \varepsilon)_{central}$**	**ε(log ε) (%)**	**Δreg/Δprop**
3	12.706	0.01839	0.2698	491.78	25.41		0.1613	293.90	15.19
4	4.303	0.01502	0.0722	131.65	6.80		0.0405	73.81	3.81
5	3.182	0.01371	0.0478	87.10	4.50		0.0255	46.56	2.41
6	2.776	0.01300	0.0390	71.08	3.67		0.0201	36.61	1.89
7	2.571	0.01256	0.0345	62.92	3.25		0.0173	31.46	1.63
8	2.447	0.01226	0.0318	58.00	3.00		0.0155	28.30	1.46
9	2.365	0.01204	0.0300	54.69	2.83		0.0143	26.15	1.35
10	2.306	0.01187	0.0287	52.33	2.70		0.0135	24.59	1.27
11	2.262	0.01174	0.0277	50.55	2.61		0.0128	23.40	1.21
12	2.228	0.01163	0.0270	49.16	2.54		0.0123	22.46	1.16
13	2.201	0.01154	0.0264	48.05	2.48		0.0119	21.71	1.12
14	2.179	0.01147	0.0259	47.14	2.44		0.0116	21.08	1.09
15	2.160	0.01141	0.0254	46.38	2.40		0.0113	20.56	1.06
16	2.145	0.01135	0.0251	45.74	2.36		0.0110	20.11	1.04
17	2.131	0.01130	0.0248	45.18	2.33		0.0108	19.72	1.02
18	2.120	0.01126	0.0245	44.71	2.31		0.0106	19.38	1.00

4.6.3. Um exemplo para o trabalho de Tanque com Agitação

A. Determinar o nº de medições do tempo de mistura.

Critério: Obtenção da constante $t^*_{0.95}$ com um erro aceitável.

$$t_\alpha = t^*_\alpha \frac{1}{N}$$

N – velocidade de agitação

Δreg:

$$\boxed{\Delta\alpha_1 \approx t_{n-2}\, s_{y.x} \frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{x_{max} - x_{min}}{4}\right)^2}}}$$

$$\boxed{s_{y.x} = \sqrt{\frac{n\,(\Delta y)^2}{n-2}}}$$

$N = 400$ rpm $= 6.67\ s^{-1}$ $\Delta N = 0.5$ rpm $= 0.0083\ s^{-1}$

$t^*_{0.95} = 200$ s

Admitindo $N_{max} = 500$ rpm $= 8{,}33\ s^{-1}$ e $N_{min} = 90$ rpm $= 1{,}5\ s^{-1}$

$x_{max} - x_{min} = 0.5487$ s

Δprop:

n	t_{n-2} (95%)	S_{yx}	$\Delta\alpha$	$\varepsilon\alpha$ (%)	Δreg/Δprop
3	12.7062	0.34641	18.59445	9.30	13.71
4	4.302653	0.282843	4.452344	2.23	3.28
5	3.182446	0.258199	2.688858	1.34	1.98
6	2.776445	0.244949	2.031545	1.02	1.50
7	2.570582	0.236643	1.68234	0.84	1.24
8	2.446912	0.23094	1.461875	0.73	1.08
9	2.364624	0.226779	1.307918	0.65	0.96
10	2.306004	0.223607	1.193115	0.60	0.88
11	2.262157	0.221108	1.103491	0.55	0.81

$$\boxed{\left(\frac{\Delta t^*_{0,95}}{t^*_{0,95}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta t_\alpha}{t_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2}$$

$$\boxed{\mathbf{\Delta t^*_{0,95} = \pm 1{,}35\ s}}$$

B. Determinar o nº de pontos das curvas de arejamento e desarejamento.

Critério: Obtenção de um erro aceitável no declive ($k_L\ a$).para a zona média de ln C em função de t.

$$\boxed{ln(C) = ln(C_0) - k_L\ a\ .t}$$

Δprop:

$$\boxed{k_L a = \frac{ln\,C_0 - ln\,C}{t}}$$

$$\boxed{\left(\frac{\Delta\,k_L a}{k_L a}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\,(\ln C_0 - \ln C)}{\ln C_0 - \ln C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\,t}{t}\right)^2}$$

$$\boxed{(\Delta\,(\ln C_0 - \ln C))^2 = (\Delta \ln C_0)^2 + (\Delta \ln C)^2 = \left(\frac{\Delta\,C_0}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\,C}{C}\right)^2}$$

$k_L a =$ 0.0999 $\Delta k_L a =$ 0.00094

Δreg:

$$\boxed{\Delta\alpha_1 \approx t_{n-2}\ s_{y.x}\ \frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{x_{max} - x_{min}}{4}\right)^2}}}$$

$$\boxed{s_{y.x} = \sqrt{\frac{n\,(\Delta y)^2}{n-2}}}$$

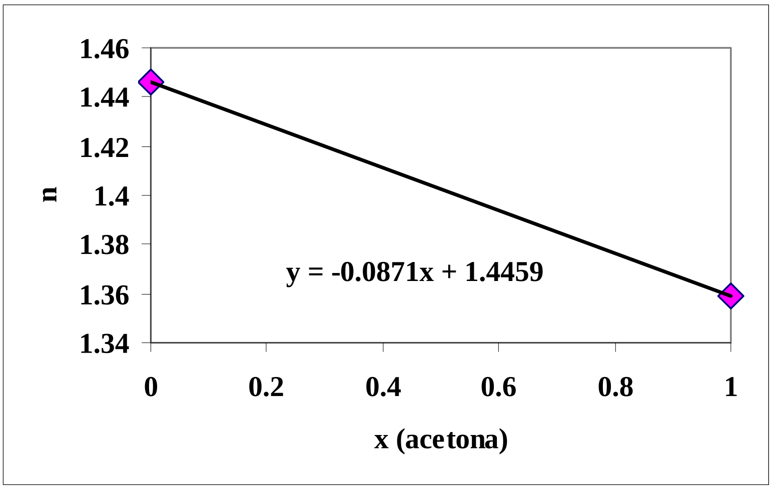
Δ y = Δ ln C = Δ C / C = 0.002

n	t_{n-2} (95%)	S_{yx}	Δα	εα (%)	Δreg/Δprop
3	12.7062	0.003299	0.003227	3.23	3.43
4	4.302653	0.002694	0.000773	0.77	0.82
5	3.182446	0.002459	0.000467	0.47	0.50
6	2.776445	0.002333	0.000353	0.35	0.37
7	2.570582	0.002254	0.000292	0.29	0.31
8	2.446912	0.002199	0.000254	0.25	0.27
9	2.364624	0.002160	0.000227	0.23	0.24
10	2.306004	0.002130	0.000207	0.21	0.22
11	2.262157	0.002106	0.000192	0.19	0.20
12	2.228139	0.002087	0.000179	0.18	0.19
13	2.200985	0.002071	0.000169	0.17	0.18
14	2.178813	0.002057	0.00016	0.16	0.17
15	2.160369	0.002046	0.000152	0.15	0.16
16	2.144787	0.002036	0.000146	0.15	0.15
17	2.13145	0.002028	0.00014	0.14	0.15
18	2.119905	0.002020	0.000135	0.13	0.14

4.6.4. Um exemplo para o trabalho de Destilação Fraccionada

Determinar o nº de pontos (padrões) para a calibração do refractómetro.

Critério: Obtenção do nº de pontos entre x=0,4 e x=1 com um erro aceitável para o índice de refracção.



$\Delta\ n_{exp} = 0{,}00025$

Índice de refracção dos componentes puros: *n* = 1,3588 e 1,4459

p=7

n	t_{n-2} (95%)	S_{yx}	$(\Delta\ n)_{central}$	ε n (%)	Δreg/Δprop
3	12.70615	0.000433	0.003797	0.271	15.19
4	4.302656	0.000354	0.000953	0.068	3.81
5	3.182449	0.000323	0.000601	0.043	2.41
6	2.776451	0.000306	0.000473	0.034	1.89
7	2.570578	0.000296	0.000406	0.029	1.63
8	2.446914	0.000289	0.000366	0.026	1.46
9	2.364623	0.000283	0.000338	0.024	1.35
10	2.306006	0.00028	0.000318	0.023	1.27
11	2.262159	0.000276	0.000302	0.022	1.21
12	2.228139	0.000274	0.00029	0.021	1.16
13	2.200986	0.000272	0.00028	0.020	1.12
14	2.178813	0.00027	0.000272	0.019	1.09
15	2.160368	0.000269	0.000266	0.019	1.06
16	2.144789	0.000267	0.00026	0.019	1.04
17	2.131451	0.000266	0.000255	0.018	1.02
18	2.119905	0.000265	0.00025	0.018	1.00

$$\Delta Y_{central} = t_{n-2}\ s_{y.x}\sqrt{\frac{n+p}{np}}$$

$$s_{y.x} = \sqrt{\frac{n\,(\Delta y)^2}{n-2}}$$

x = 0,4 – 1

4.6.5. Um exemplo para o trabalho de Coluna de Bolhas

Determinar o nº de pontos nas curvas de arejamento e desarejamento.

Critério: Obtenção do declive $-k_L a$ na zona média com um erro aceitável.

$$\ln(C) = \ln(C_0) - k_L a \ t$$

$\Delta \ln(C) = \Delta C/C$ $\Delta C = 0{,}1\ \%$ $t = 120$ s

$$\boxed{k_L\ a = \frac{\ln C_0 - \ln C}{t}}$$

$k_L a = 0{,}0384\ s^{-1}$

$\Delta y = 0{,}002$

n	t_{n-2} (95%)	S_{yx}	$\Delta\alpha$	$\varepsilon\alpha$ (%)	Δreg/Δprop
3	12.7062	0.00346	0.00085	2.21	1.01
4	4.302653	0.00283	0.0002	0.53	0.24
5	3.182446	0.00258	0.00012	0.32	0.15
6	2.776445	0.00245	9.3E-05	0.24	0.11
7	2.570582	0.00237	7.7E-05	0.20	0.09
8	2.446912	0.00231	6.7E-05	0.17	0.08
9	2.364624	0.00227	6E-05	0.16	0.07
10	2.306004	0.00224	5.4E-05	0.14	0.07
11	2.262157	0.00221	5E-05	0.13	0.06
12	2.228139	0.00219	4.7E-05	0.12	0.06
13	2.200985	0.00217	4.4E-05	0.12	0.05
14	2.178813	0.00216	4.2E-05	0.11	0.05
15	2.160369	0.00215	4E-05	0.10	0.05
16	2.144787	0.00214	3.8E-05	0.10	0.05
17	2.13145	0.00213	3.7E-05	0.10	0.04
18	2.119905	0.00212	3.5E-05	0.09	0.04

Δ reg:

$$\boxed{\Delta\alpha_1 \approx t_{n-2}\ s_{y.x}\ \frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{x_{max} - x_{min}}{4}\right)^2}}}$$

$$\boxed{s_{y.x} = \sqrt{\frac{n\ (\Delta y)^2}{n-2}}}$$

Δ prop:

$$\boxed{\left(\frac{\Delta_{k_L a}}{k_L a}\right)^2 = \left(\frac{\Delta(\ln C_0 - \ln C)}{\ln C_0 - \ln C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

$$\boxed{(\Delta(\ln C_0 - \ln C))^2 = \left(\frac{\Delta C_0}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2}$$

$$\boxed{\Delta\, k_L\ a = 0{,}00084\, s^{-1}}$$

4.6.6. Um exemplo para o trabalho de Torre de Arrefecimento

Determinar o nº de pontos e repetições da calibração dos rotâmetros.

Critério: Obtenção da ordenada L na zona média com um erro aceitável.

- 2 ou 3 medições em triplicado

$$\Delta Y_{central} = t_{n-2}\, s_{y.x} \sqrt{\frac{n+p}{np}}$$

$$\boxed{L = \frac{V}{t}}$$

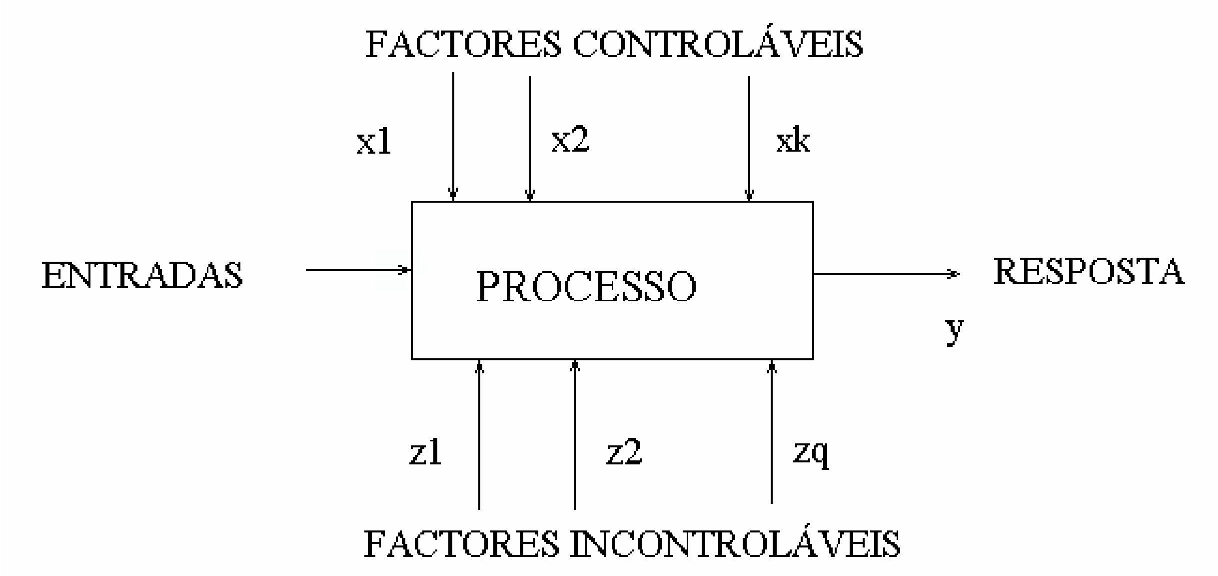
$$\boxed{s_{y.x} = \sqrt{\frac{n(\Delta y)^2}{n-2}}}$$

$$\boxed{\Delta L = \Delta L_{exp} = 0{,}0357 \text{ L/min}}$$

n	t_{n-2} (95%)	S_{yx}	$(\Delta L)_{central}$	ε L (%)	Δreg/Δprop
3	12.706205	0.061834	0.907223	11.34029	25.40
4	4.3026527	0.050487	0.24287	3.035879	6.80
5	3.1824463	0.046089	0.160674	2.008419	4.50
6	2.7764451	0.043723	0.131122	1.639028	3.67
7	2.5705818	0.042241	0.116081	1.451007	3.25
8	2.4469118	0.041223	0.106987	1.337341	3.00
9	2.3646243	0.04048	0.100898	1.261221	2.83
10	2.3060041	0.039914	0.096534	1.206673	2.70
11	2.2621572	0.039468	0.093252	1.165656	2.61
12	2.2281388	0.039107	0.090695	1.133684	2.54
13	2.2009852	0.03881	0.088645	1.108059	2.48
14	2.1788128	0.03856	0.086965	1.087059	2.44
15	2.1603687	0.038348	0.085563	1.069534	2.40
16	2.1447867	0.038165	0.084375	1.054685	2.36
17	2.1314495	0.038006	0.083355	1.041943	2.33
18	2.1199053	0.037866	0.082471	1.030888	2.31

5. PLANIFICAÇÃO FACTORIAL

UM PROCESSO OU SISTEMA PODE SER REPRESENTADO POR UM MODELO:



OBJECTIVOS DA EXPERIÊNCIA:

1. Determinar quais das VARIÁVEIS INDEPENDENTES (FACTORES) x's influenciam mais a RESPOSTA, y (VARIÁVEL DEPENDENTE).
2. Determinar como é possível manipular as variáveis x's de tal modo que y esteja sempre próximo do seu valor nominal.
3. Determinar como é possível manipular as variáveis x's de tal modo que a variabilidade de y seja pequena.
4. Determinar como é possível manipular as variáveis x's de tal modo que o efeito das variáveis incontroláveis z's sejam minimizadas.

A utilização da PLANIFICAÇÃO EXPERIMENTAL pode resultar em:

- ❖ Aumento de rendimentos de um processo.
- ❖ Redução da variabilidade de requisitos nominais.
- ❖ Redução do tempo de implementação do processo.
- ❖ Redução de custos.

A utilização da PLANIFICAÇÃO EXPERIMENTAL pode tomar aspectos muito importantes na actividade do engenheiro, quando se pretendem desenvolver novos produtos ou processos ou implementar os já existentes, incluindo, por exemplo:

- ❖ Avaliação e comparação de configurações básicas de projecto.
- ❖ Avaliação de alterações no material.
- ❖ Selecção de parâmetros de projecto, de tal modo que o produto seja ***ROBUSTO***, ou seja, para uma grande variedade de condições, o processo trabalhe bem.
- ❖ Avaliação dos parâmetros chave que produzam bons rendimentos para o produto.

Muitas experiências envolvem o estudo de efeitos de vários factores (ENSAIOS MULTIFACTORIAIS).
Em geral a PLANIFICAÇÃO FACTORIAL é mais eficiente neste tipo de experiências.

O EFEITO DE UM FACTOR é a variação na resposta produzida pela variação no NÍVEL DO FACTOR.

A **PLANIFICAÇÃO FACTORIAL** permite verificar e efectuar o estudo da influência de 1, 2, 3, ..., k FACTORES.

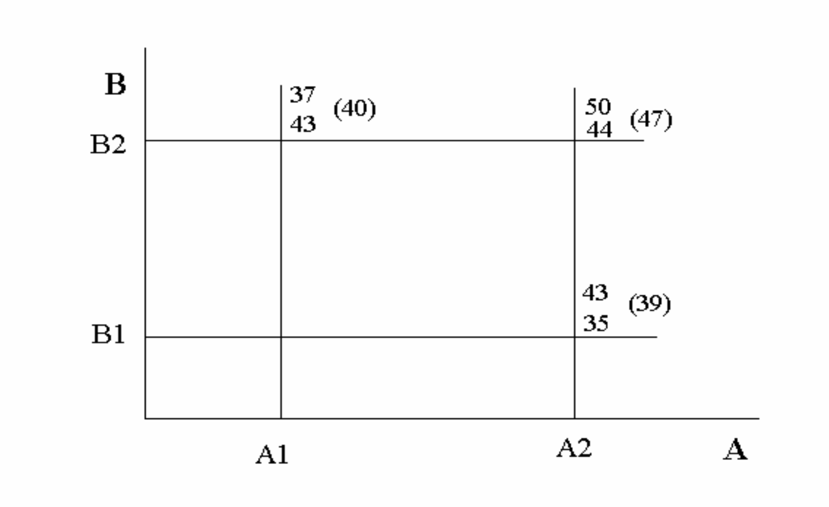
Num **ESTUDO CLÁSSICO**, o que normalmente se faz, é considerar factores constantes, enquanto se analisa a influência da variação de um dado factor no resultado.

Pelo contrário, num **ESTUDO FACTORIAL**, com a ajuda da análise de variância, toda a informação pode ser obtida simultaneamente.

Consideremos duas variáveis independentes, **<u>A</u>** e **<u>B</u>**, que influenciam os valores da variável dependente (resposta).

Estes **<u>FACTORES</u> <u>A</u>** e **<u>B</u>**, são investigados a dois níveis **(A_1 e A_2)** e **(B_1 e B_2)** e os testes são repetidos para obter um certo número de observações.

Os valores obtidos vão-nos permitir obter informações acerca da sua influência no valor da resposta.



Estes resultados permitem dizer que, quando **B** se mantém no nível B_2, a resposta tem o valor médio de 47, quando **A** toma o valor mais elevado A_2, e o valor da resposta é 40, quando a variável **A** está no nível mais baixo A_1.

Existe uma variação de 7, quando a variável **A** passa do valor mais baixo para o valor mais elevado. Esta variação designa-se por **EFEITO DO FACTOR A**.

De igual modo, quando **A** se mantém no nível A_2, a resposta tem o valor médio de 39, quando **B** toma o valor mais baixo B_1.

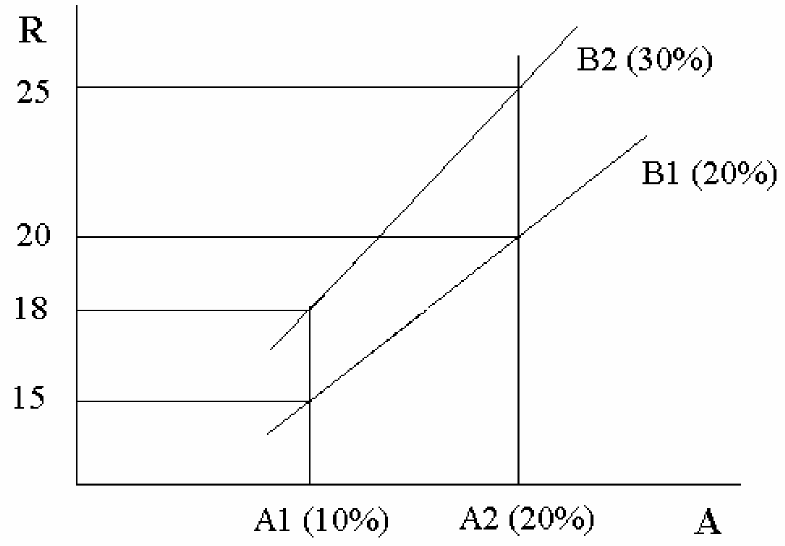
Existe uma variação de 8, quando a variável **B** passa do valor mais baixo para o valor mais elevado. Esta variação designa-se por **EFEITO DO FACTOR B**.

Como o efeito de **B** é maior que o efeito de **A**, a variável **B** é a variável mais importante.

Embora este teste clássico avalie o efeito de **A** e de **B**, não nos revela:

- Os intervalos de confiança dos efeitos **A** e **B**.
- Os erros experimentais nos dados.
- O efeito de interacções entre os dois factores.

INTERACÇÃO ENTRE FACTORES



O valor da resposta aumenta de 15 para 20 (**5 unidades**) quando o factor **B** toma o valor B_1 (20 %), e o factor **A** varia de 10 para 20 %.

No entanto, quando o factor **B** toma o valor B_2 (30 %), e o factor **A** varia de 10 para 20 %, o valor da resposta varia **7 unidades** (25-18).

Este facto indica a presença de interacção entre os factores **A** e **B**.

5.1. ANÁLISE DE VARIÂNCIA (ANOVA) NA PLANIFICAÇÃO A UM FACTOR

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	QUADRADOS DOS DESVIOS (SS)	VARIÂNCIAS OU MÉDIAS QUADRÁTICAS (MS)	F_0
NÍVEIS (COLUNAS)	v-1	$SS_v = \frac{\sum T_v^2}{p} - \frac{T^2}{n}$	$MS_C = \frac{SS_v}{v - 1}$	$\frac{MS_C}{MS_{residual}}$
RESIDUAL	(n-1)-(v-1)	$SS_{residual} = SS_{total} - SS_v$	$MS_{residual} = \frac{SS_{residual}}{(n-1)-(v-1)}$	
TOTAL	n-1	$SS_{total} = \sum x^2 - \frac{T^2}{n}$		

T = Soma total de todas as observações
n = Número total de observações
v = Número de níveis
p = Número de réplicas em cada nível

A comparação de $\mathbf{F_0}$ com os valores de **F** tabelados permite analisar com que probabilidade há ou não há diferenças significativas entre as colunas (níveis).

EXEMPLO F1

Um engenheiro está interessado em maximizar a tensão de uma nova fibra sintética para ser usada na feitura de camisolas de homem. É conhecido que essa tensão é influenciada pela percentagem de algodão (suspeita-se que o aumento da quantidade de algodão aumenta a tensão). Sabe-se também que a quantidade de algodão deve variar entre 10 e 40 %, para manter a qualidade.

Assim decidiu testar 5 níveis de percentagem de algodão: 15, 20, 25, 30 e 35 %. Decidiu igualmente efectuar 5 testes a cada nível de percentagem de algodão.

É um exemplo de planificação a **UM FACTOR** com **5 NÍVEIS** e **5 REPETIÇÕES** em cada nível. as 25 observações devem ser efectuadas ao acaso.

TENSÃO (ATM.)

ALGODÃO (%)	OBSERVAÇÕES					SOMAS	MÉDIAS
	1	2	3	4	5		
15	0,48	0,48	1,02	0,75	0,61	3,34	0,667
20	0,82	1,16	0,82	1,22	1,22	5,24	1,05
25	0,95	1,22	1,22	1,29	1,29	5,99	1,20
30	1,29	1,70	1,50	1,29	1,56	7,34	1,47
35	0,48	0,68	0,75	1,02	0,75	3,68	0.73
TOTAL						T=25,58	1.02

ANÁLISE DE VARIÂNCIA (ANOVA):

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	QUADRADOS DOS DESVIOS (SS)	VARIÂNCIAS OU MÉDIAS QUADRÁTICAS (MS)	F_0
PERCENTAGEM DE ALGODÃO	v-1 = 4	SS_v =2,209	2,209/4 = 0,55225	16,05
RESIDUAL	(n-1) - (v-1) = 20	$SS_{residual}$ = 0,688	0,0344	
TOTAL	n-1 = 24	SS_{total} = 2,897		

Comparando **16,05** com o valor tabelado **($F_{0,01;4:20}$ = 4,43),** como é maior, podemos dizer, para uma confiança de **99 %,** que a percentagem de algodão na fibra **AFECTA SIGNIFICATIVAMENTE A TENSÃO DO TECIDO**.

5.2. ANÁLISE DE VARIÂNCIA (ANOVA) NA PLANIFICAÇÃO MULTIFACTORIAL

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	QUADRADOS DOS DESVIOS (SS)	VARIÂNCIAS OU MÉDIAS QUADRÁTICAS (MS)	F_0
LINHAS	r-1	$SSr = \frac{\sum T_r^2}{p\,c} - \frac{T^2}{n}$	$MS_r = \frac{SS_r}{r - 1}$	$\frac{MS_r}{MS_{residual}}$
COLUNAS	c-1	$SS_c = \frac{\sum T_c^2}{p\,r} - \frac{T^2}{n}$	$MS_c = \frac{SS_c}{c - 1}$	$\frac{MS_c}{MS_{residual}}$
INTERACÇÃO LINHAS-COLUNAS	(c-1) (r-1)	$SS_{cr} = \frac{\sum T_{cr}^2}{p} - \frac{T^2}{n} - SS_c - SS_r$	$MS_{int} = \frac{SS_c}{c - 1}$	$\frac{MS_{int}}{MS_{residual}}$
RESIDUAL	(n-1)- S (outros)	$SS_{resid} = SS_{total} - SS_c - SS_r - SS_{cr}$	$MS_{residual} = \frac{SS_{residual}}{(n-1) - (c - 1)}$	
TOTAL	n-1	$SS_{total} = \sum x^2 - \frac{T^2}{n}$		

A comparação dos $\mathbf{F_0}$'s com os valores de **F** tabelados permite analisar, para Z % de probabilidade qual (ais) dos factores afectam significativamente a resposta.

Quando p=1, ou seja, quando em cada célula não há ensaios repetidos, a análise de variância simplifica-se, porque deixa de existir a interacção linhas-colunas.

6. RSM - MÉTODO DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA

É uma técnica estatística muito útil para a modelação e análise de problemas nos quais a resposta é influenciada por várias variáveis (factores) e o grande objectivo é a **OPTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA.**

A **SUPERFÍCIE DA RESPOSTA** é definida por:

$$Y = f\,(X_1, X_2, X_3, ...)$$

EXEMPLO RSM 1

Numa reacção química as variáveis mais importantes são a concentração de um dos reagentes (X) e o tempo de reacção (t). Pretende-se saber qual o valor das variáveis que maximizam o rendimento.

(As condições normalmente utilizadas são: X = 25 % E t = 1 h).

Como são 2 variáveis (2 efeitos), estudados a 2 níveis, temos uma planificação $\mathbf{2^2}$, e, com **PONTOS CENTRAIS**, vai-nos permitir usar **UM MODELO LINEAR** (de 1ª ordem)

Estabelecer a matriz das variáveis em unidades de código e em unidades físicas:

ENSAIO	VALORES CODIFICADOS DAS VARIÁVEIS		VALORES REAIS DAS VARIÁVEIS		Resposta R=R (%)
	X1=X	X2=t	X1= X (%)	X2= t (h)	
1	-1	-1	23	0.9	43.7
2	+1	-1	27	0.9	44.5
3	-1	+1	23	1.1	47.2
4	+1	+1	27	1.1	51.8
5	0	0	25	1.0	46.8
6	0	0	25	1.0	45.9
7	0	0	25	1.0	45.3

Nas variáveis codificadas:

-1 – significa o valor mais baixo

+1 – significa o valor mais alto

0 – significa um ponto central

Estimativa dos parâmetros da correlação linear múltipla.

$$\hat{Y} = 46.46 + 1.35\, x_1 + 2.7\, x_2$$

Estimativa dos valores dos efeitos a 95% de probabilidade

Efeito da concentração = 1.35
Efeito do tempo = 2.7
Efeito da interacção concentração - tempo = 0.95

CONCLUSÕES

Quando X e t aumentam, aumenta o rendimento
O tempo é o efeito mais importante.

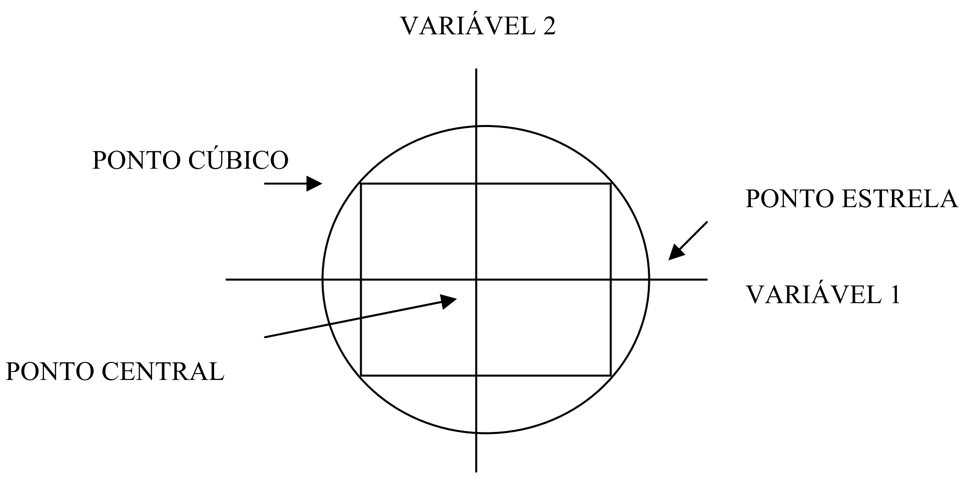
6.1. C C D (CENTRAL COMPOSITE DESIGN)

Extensão do modelo 2^k (linear), para permitir modelos quadráticos

Consiste em três tipos de experiências:

- ✧ **PONTOS CÚBICOS** $\Rightarrow$ pontos do modelo 2^k
- ✧ **PONTOS CENTRAIS** $\Rightarrow$ réplicas do centro do cubo
- ✧ **PONTOS ESTRELA** $\Rightarrow \sqrt[4]{2^k} \cdot \dfrac{(\text{CÚBICO ALTO - CÚBICO BAIXO})}{2}$

C C D PARA DOIS FACTORES



Cada variável de projecto tem **5 NÍVEIS**, correspondentes aos pontos:

ESTRELA BAIXO, CÚBICO BAIXO, CENTRAL, CÚBICO ALTO, ESTRELA ALTO.

O número total de experiências é:

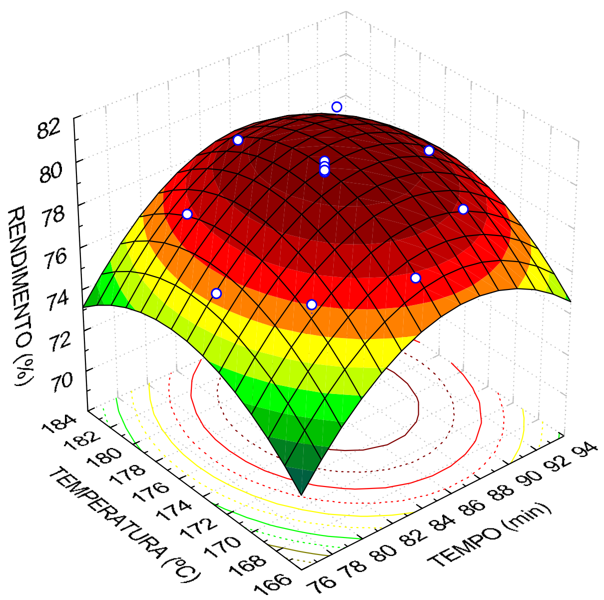
- ✧ **QUATRO CÚBICAS -** correspondentes aos quatros vértices do quadrado (2^2)
- ✧ **AMOSTRAS CENTRAIS**
- ✧ **QUATRO ESTRELAS**

EXEMPLO RSM 2

Pretende-se saber qual o valor das variáveis tempo (t) e temperatura (T) que maximizam o rendimento de uma reacção química.

Variáveis codificadas		Variáveis naturais		
x1	x2	tempo (min)	Temp (ºC)	Rendimento (%)
-1	-1	80	170	76.5
-1	1	80	180	77
1	-1	90	170	78
1	1	90	180	79.5
0	0	85	175	79.9
0	0	85	175	80.3
0	0	85	175	80
0	0	85	175	79.7
0	0	85	175	79.8
1.414	0	92.07	175	78.4
-1.414	0	77.93	175	75.6
0	1.414	85	182.07	78.5
0	-1.414	85	167.93	77

STATISTICA



z=-1579.4+9.5589*t-.055057*t^2+14.121*T-.040053*T^2