3

Problemas redutíveis a TP

Suportados no Problema do Transporte, podem-se resolver vários outros tipos de problemas, cuja formulação se consegue reduzir à daquele. São aplicações clássicas a transexpedição, o planeamento de produção e a afectação. Trataremos o primeiro destes problemas com algum detalhe e apresentaremos sumariamente os restantes.

O problema de transexpedição

Uma exigência do *problema do transporte* é o conhecimento antecipado do «caminho» de distribuição das unidades desde cada origem i até cada destino j, para que se saiba o necessário custo correspondente por unidade (c_{ij}). Por vezes, porém, o melhor caminho de distribuição não é claro, por causa da possibilidade de «transexpedições», caso em que os envios passariam por pontos intermédios de transferência, os *entrepostos* (que podem ser também origens ou destinos).

Tais possibilidades de transexpedição poder-se-iam previamente investigar para determinar a rota mais barata de cada origem para cada destino. Contudo, isto é um processo complicado e moroso se houver muitos entrepostos potenciais. Convirá, pois, encontrar um algoritmo que resolva, simultaneamente, as quantidades a enviar de cada origem para cada destino e a rota a seguir para cada envio, de modo a minimizar o custo total.

Esta extensão do TP, de modo a incluir as decisões das rotas, é referida como *problema de transexpedição* (“transshipment-” ou “transhipment problem”, em inglês, respectivamente, britânico e da Norte América). Dado que há uma maneira simples de reformular o problema de transexpedição como TP, usa-se o algoritmo deste para o resolver.

Far-se-á uma apresentação sumária do problema, um exemplo de TP de Ramalhete *et al*. [1984, p 36] (aí não resolvido), depois alargado a transexpedição.

■ *Exemplo 1 (protótipo)*

Uma empresa[1] que abastece semanalmente certo produto às cidades de Lisboa e Porto pretende estabelecer um plano de distribuição do produto a partir das fábricas situadas em Peniche, Viseu e Évora. Os dados são os do *Quadro 1*, com as quantidades em t (tonelada) e os custos unitários de transporte em $ / t:

[1] Ficheiro `tp-trsex-proto.dat`.

Quadro 1

	Lisboa	Porto	*Produção*
Peniche	13	25	70
Viseu	25	16	130
Évora	15	40	120
Consumo	180	140	

Considere-se agora que, para além do abastecimento directo a Lisboa e Porto, existe a possibilidade de abastecimento através de entrepostos, a localizar não só nos centros produtores e consumidores mas também em Aveiro e Santarém (entrepostos). Os custos unitários de transporte ($/t) são os do ***Quadro 2*** (acidentalmente, «simétricos»).

Quadro 2

	Peniche	Viseu	Évora	Aveiro	Santarém	Lisboa	Porto
Peniche	0	20	20	15	10	13	25
Viseu		0	30	15	18	25	16
Évora			0	35	20	15	40
Aveiro				0	15	20	7
Santarém					0	12	20
Lisboa						0	27
Porto							0

Pretende-se obter o novo plano de distribuição mais económico. ■

No problema do transporte, as origens enviam o produto directamente para os destinos (excluindo-se a possibilidade de pontos intermédios), pois se admite que o melhor percurso corresponde à ligação directa origem-destino. Todavia, convém permitir o recurso a entrepostos (pontos de passagem), que podem ser cumulativamente origens e destinos já existentes.

Tem-se um *problema de transexpedição* quando se pretende minimizar o custo total de transporte entre um certo número de pontos —origens, destinos e entrepostos—, contemplando todas as hipóteses possíveis, sendo conhecidas as produções e os consumos e a matriz dos custos.

Observe-se que a transexpedição se pode formalizar como programação linear. Havendo m origens, n destinos e p entrepostos, sendo a_i as produções e b_j os consumos e c_{ij} e x_{ij} os custos unitários e quantidades a transportar, estabelecer-se-ão as equações do modelo. Do ponto de vista da transexpedição, origens, entrepostos e destinos caracterizam-se, no que respeita a quantidades (q), por:

Origem: [q saída] – [q entrada] = [q disponível]

Entreposto: [q saída] = [q entrada]

Destino: [q saída] – [q entrada] = – [q necessária]

Fazendo, necessariamente, $\sum_i a_i = \sum_j b_j = Q$, o problema pode formalizar-se assim:

$$[\min] \quad z = \sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} - \sum_{j \neq i} x_{ji} = a_i \qquad \text{para as origens}$$

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} - \sum_{j \neq i} x_{ji} = 0 \qquad \text{para os entrepostos}$$

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} - \sum_{j \neq i} x_{ji} = -b_i \qquad \text{para os destinos}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{(todos os valores)}$$

A resolução manual da transexpedição como programação linear é, no entanto, muito mais trabalhosa do que pelo algoritmo do TP.

Resolução da transexpedição

Admitir-se-á que a oferta total (Q) pode passar por qualquer ponto (origem, entreposto ou destino) antes do respectivo destino final, isto é, qualquer ponto pode funcionar como entreposto [*sic*, Guerreiro *et al.*, 1985, p 215]. Não se sabendo que origens e destinos exercerão esta dupla função, todos os pontos poderão ser origens e destinos (sugere-se prudência nesta asserção).

Dado o objectivo pretendido (passagem a problema do transporte), há que analisar a definição das novas variáveis x_{ii}, bem como estipular as ofertas e as procuras. A quantidade a transexpedir através dum local deverá ser incluída tanto na sua procura como na sua oferta [Hillier & Lieberman, 1990, p 239]. Como este número é desconhecido *a priori*, um limite seguro será Q (e não mais, já que não há circuitos), que se adicionará (neste caso) a todas as capacidades do problema original. A «folga» para o local i será x_{ii}, carga fictícia enviada do local para si próprio, a custo nulo ($c_{ii} = 0$). Assim, a quantidade real *transexpedida* através do local i —seja, t_i— será

$$t_i = Q - x_{ii}$$

O problema de transexpedição do *Exemplo 1* transformar-se-á, assim, num problema do transporte *(Quadro 3).*

A solução do problema de transexpedição pode ler-se na deste problema de transporte equivalente. A solução do problema do transporte é a do *Quadro 4*, sendo os elementos da matriz quantidades a transportar.

Quadro 3

	Peniche	Viseu	Évora	Aveiro	Santarém	Lisboa	Porto	*Produção*
Peniche	0	20	20	15	10	13	25	390
Viseu	20	0	30	15	18	25	16	450
Évora	20	30	0	35	20	15	40	440
Aveiro	15	15	35	0	15	20	7	320
Santarém	10	18	20	15	0	12	20	320
Lisboa	13	25	15	20	12	0	27	320
Porto	25	16	40	7	20	27	0	320
Consumo	320	320	320	320	320	500	460	(2560)

Quadro 4

	Peniche	Viseu	Évora	Aveiro	Santarém	Lisboa	Porto	*Produção*
Peniche	320	0	0	10	0	60	0	390
Viseu	0	320	0	0	0	0	130	450
Évora	0	0	320	0	0	120	0	440
Aveiro	0	0	0	310	0	0	10	320
Santarém	0	0	0	0	320	0	0	320
Lisboa	0	0	0	0	0	320	0	320
Porto	0	0	0	0	0	0	320	320
Consumo	320	320	320	320	320	500	460	(2560)

Custo mínimo:
$z = 15\times10 + 13\times60 + 16\times130 + 15\times120 + 7\times10 = \$\,4880$

A solução óptima do problema de transexpedição mostra-se na *Figura 1* (sendo, neste caso, todos os movimentos da esquerda para a direita):

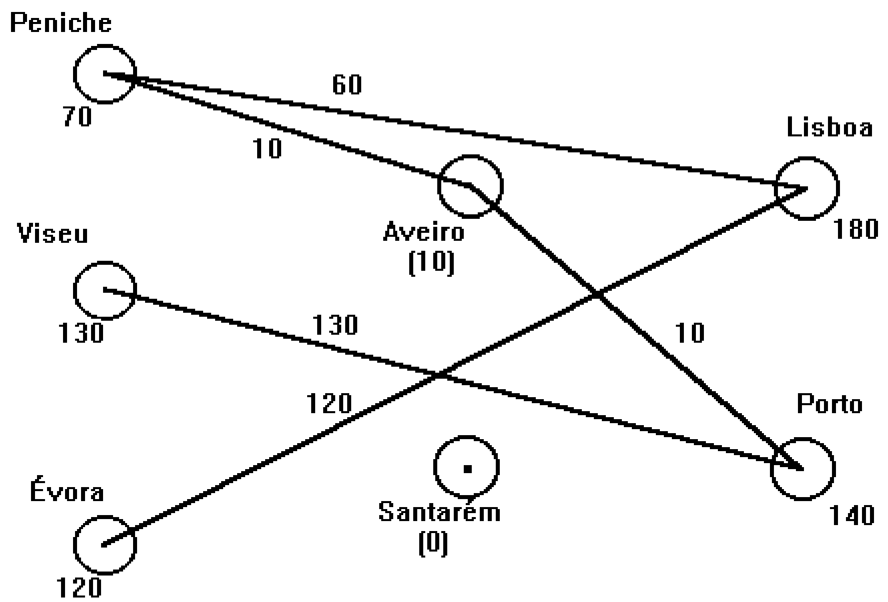

Figura 1 – Representação dum «problema do transporte»

■ ***Exemplo 2***

Para os dados da rede[2] da *Figura 2*, determine um plano de transporte óptimo, no sentido de satisfazer todos os requisitos[3] a custo total mínimo. [*In* Bronson, 1982, Probl. 9.3, p 89.]

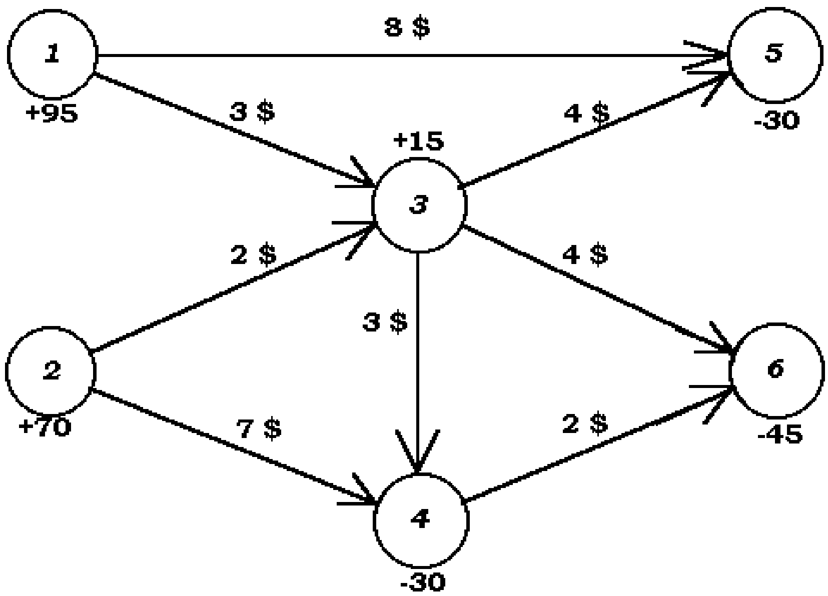

Figura 2 – Rede de origens, entrepostos e destinos.

Os locais ***1*** e ***2*** são *origens* (deles, só há saídas), enquanto que ***5*** e ***6*** são *destinos* (neles, só se entra). O local ***3*** é origem e *entreposto*, sendo as capacidades das origens convencionalmente positivas, ao passo que o local ***4*** serve de destino e de *entreposto*, com capacidade negativa.

Como a produção total é de $Q = 95+70+15 = 180$ unidades mas o consumo total é de apenas $-30-30-45 = -105$, cria-se um local ***7***, destino fictício com capacidade tal que $(q_7-105)+180 = 0$, i. é, $q_7 = -75$ unidades.

Dado que cada *entreposto* é feito origem e destino, juntando Q à sua produção e ao seu consumo, o problema do transporte terá as origens ***1***, ***2***, ***3*** e ***4*** e os destinos ***3***, ***4***, ***5***, ***6*** e ***7***. Além dos custos unitários já dados na *Figura 2*, teremos: 0 como custo desde um entreposto (como origem) para si mesmo (como destino); 0 como custo desde qualquer origem para o destino fictício; e um custo arbitrariamente alto (por exemplo, 10^4 $, se for «suficiente» *a posteriori*) para qualquer ligação inexistente (como de ***1*** para ***6***).

O *Quadro 5* é a matriz de transporte óptima. O local ***3*** recebe 20 unidades do local ***1*** e 70 de ***2***, após o que redistribui estas unidades juntamente com a sua própria produção inicial de 15 para os locais ***4***, ***5*** e ***6***. Depois de satisfazer todos os consumos, o local ***1*** ficará com 75 unidades, atribuídas no matriz ao local fictício ***7***.

---

[2] Ficheiro `hit-br93.dat`

[3] «Requisito» (Dic. Când. Fig.) —«requesito» não figura. («Quesito» não está directamente relacionado.)

As remessas $x_{33} = 90$ e $x_{44} = 180$ são valores tabulares com o significado de números de unidades que *não passam* através dos entrepostos ***3*** e ***4***, respectivamente.

O custo total mínimo obtido é de 590 $ e a solução é única.

Quadro 5

Origens	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	Produção:	
	Destinos						
1	20				75	95	
2	70					70	
3	90	30	30	45		195	(15+Q)
4		180				180	(0+Q)
Consumo:	180	210	30	45	75	*(540)*	
	(0+Q)	(30+Q)					

■

Segue-se *(Nota 1)* uma proposta de algoritmo para converter problemas de transexpedição no correspondente TP, assim resolúvel pelo método clássico.

Nota 1: **Conversão da transexpedição a TP**

1) Caracterizar o problema do transporte subjacente, o *problema base*, identificando:

NS		Número de origens
ND		Número de destinos
KVIS	Vector	Identidade das "origens" *(**s**ources)*
KVID	Vector	Identidade dos "destinos" *(**d**estinations)*
KVQS	Vector	Quantidade "ofertas" *(**s**upplies)*
KVQD	Vector	Quantidades "procuras" *(**d**emands)*
KOST	Matriz	Custos

2) Determinar o estado de equilíbrio do problema base, calculando

$$KQS = \sum_{i=1}^{NS} KVQS_i \qquad KQD = \sum_{j=1}^{ND} KVQD_j$$

a) Se o problema está equilibrado —i. é, se $KQS = KQD$—, passar a 3). Definir a *capacidade* do problema, KQ, como $KQ = KQS = KQD$.

b) Se o problema não está equilibrado, acrescentar uma **origem** ou um **destino** fictício (complementar):

- Se $KQS < KQD$, fazer $KQ = KQD$, criar uma **origem** com uma oferta $KQ - KQS$ e aumentar NS de 1 unidade.
- Se $KQS > KQD$, fazer $KQ = KQS$, criar um **destino** com uma procura $KQ - KQD$ e aumentar ND de 1 unidade.

	C	D	E	
A	*kost*([A],[C])	*kost*([A],[D])	*kost*([A],[E])	S([A])
B	*kost*([B],[C])	*kost*([B],[D])	*kost*([B],[E])	S([B])
	D([C])	D([D])	D([E])	(KQ)

3) Verificar se há entrepostos.
- **a)** Se **não há** entrepostos, o problema final é o problema base. Terminar.
- **b)** Se **há** entrepostos, passar a 4).

4) Classificar os entrepostos como *primitivos* ou *suplementares*: um entreposto é primitivo se coincide com uma origem e ou um destino do problema base; é suplementar se não coincide com nenhum deles.
- **a)** Cada entreposto suplementar constituirá uma nova *origem* e um novo *destino*. Na matriz dos custos assim aumentada, são acrescentadas: colunas de custos dos trajectos entre as origens e os entrepostos suplementares; e linhas de custos dos trajectos entre os entrepostos suplementares e os destinos.
- **b)** Todos os entrepostos (tanto primitivos como suplementares) terão a sua capacidade aumentada de *KQ*.

■

O problema de «planeamento de produção»

Inclui-se o *Exemplo 3* [Hillier & Lieberman, 1995, p 310], acerca do chamado “production scheduling”[*], ou *planeamento de produção*. O «transporte» pode ser imaginado, porém é não no espaço mas no tempo; há limites de produção e não produções fixadas; e têm de se impedir todos os «caminhos» que levem dum período de produção a um período de consumo que lhe seja anterior.

[*] [(BrE) ' edju:l; (AmE) 'skedju:l] De *sedule* (Ingl. méd.), tira de pergaminho ou de papel < *cedule* (Fr. antigo) < *schedula* (Lat. mod.), dim. de *scheda*, variante de (Lat.) *scida*, tira de papiro < *skhida*, *skhede* (Gr.), talvez afim de *skhizein*, separar. “*k*” (Gr.) pode dar *c*: *kinema* (Gr.) > *cinéma* (Fr.) **1.** Lista de tempos de partidas e chegadas; horário *(a bus schedule)*. **2.** Plano para executar trabalho ou atingir um objectivo, especificando a ordem e tempo atribuído a cada parte *(we finished the project on schedule)*. **3.** Lista escrita de itens em forma tabular *(a schedule of postal rates)*. **4.a.** Programa de acontecimentos ou encontros; **b.** Programa de aulas (horário) dum estudante.

■ *Exemplo 3*

Uma empresa[4] produz motores de avião e pretende planear a produção destes nos próximos 4 meses, segundo os dados do *Quadro 6* [Hillier & Lieberman, 1995, p 310]. Nos vários meses, há diferentes números de montagens de motores previstas, produções máximas e custos unitários (em $ 10^6) de produção e de armazenagem.

Quadro 6

Mês	Montagens previstas	Produção máxima	Custo unit. de produção	Custo unit. de armazenagem
1	10	25	1,08	0,015
2	15	35	1,11	»
3	25	30	1,10	»
4	20	10	1,13	—

[4] Ficheiro `tp-prodsch.dat`.

Pretende-se o planeamento de custo total (produção e armazenagem) mínimo.

Fazendo x_{ij} o número de motores fabricados no mês i para montagem no mês j e c_{ij} o custo associado, podemos criar o problema de transporte do *Quadro 6 A*, ainda incompleto.

Quadro 6 A

		Mês destino				
		1	*2*	*3*	*4*	*Produção*
Mês origem	*1*	1,080	1,095	1,110	1,125	™ 25
	2		1,110	1,125	1,140	™ 35
	3			1,100	1,115	™ 30
	4				1,130	™ 10
	Consumo	10	15	25	20	(™ 100)

O artifício para conduzir este problema a um TP (*Quadro 6 B*) é, após «proibir» os percursos impossíveis (custo infinitamente grande, M), criar um destino fictício, F, que receberá, a custo zero, a produção não utilizada.

Quadro 6 B

	1	*2*	*3*	*4*	*F*	*Produção*
1	1,080	1,095	1,110	1,125	0	25
2	M	1,110	1,125	1,140	0	35
3	M	M	1,100	1,115	0	30
4	M	M	M	1,130	0	10
Consumo	10	15	25	20	*30*	(100)

O custo óptimo será $\$\,77{,}3 \times 10^6$ (com solução não única). ■

O problema da Afectação

[Hillier & Lieberman]

■ ***Exemplo 4***

Um grupo de amigos[5], raparigas e rapazes em igual número, decide formar casais, atribuindo-se preferências (de 0 a 20), como segue. (Neste caso, para ter uma classificação única, conviria sortear o «lado» que atribui as preferências, *v. g.*, as raparigas.)

[5] Ficheiro `tp-casais.dat`.

Preferências	Ana	Helena	Deolinda	Maria	*Ofertas:*
Joel	15	16	14	14	1
Pedro	14	14	13	15	1
Fernando	13	15	13	14	1
Luís	15	16	14	14	1
Procuras:	1	1	1	1	

Determine a «melhor» formação de casais, supondo um critério de *preferência total máxima*, recorrendo ao problema do transporte. (As classificações, todas «parecidas», entre 13 e 16, pretendem provocar multiplicidade de soluções.)

É um problema de afectação. Se se quiser prescindir do algoritmo próprio — método húngaro— e torná-lo num TP típico, começar-se-á por transformar as *preferências* em *custos*. Se se substituir cada preferência pelo seu complemento para um máximo conveniente (*v. g.*, 20), vem

Custos:	Ana	Helena	Deolinda	Maria	*Ofertas:*
Joel	5	4	6	6	1
Pedro	6	6	7	5	1
Fernando	7	5	7	6	1
Luís	5	4	6	6	1
Procuras:	1	1	1	1	

A solução é JH, PM, FD e LA, a custo de 21. (Este método de formar casais pode ter consequências nefastas.)

Verifique se se obteria a mesma afectação substituindo cada preferência pelo seu complemento para o máximo das preferências. ■