



## O mistério do armazém absorvido

Imagine o leitor que pretende construir um armazém para distribuição de bens por um certo número de cidades. Qual é a localização óptima do armazém, no sentido de minimizar os custos totais de distribuição?

O problema não tem (apenas) um interesse académico. Se o leitor trabalhar numa empresa de distribuição, quererá ter armazéns localizados de forma a minimizar os custos de transporte dos bens aos clientes. Se trabalhar em energia ou telecomunicações, quererá ter uma rede de cabos eléctricos ou fibra óptica com o menor comprimento total de rede, mas que sirva as necessidades de tráfego (que são diferentes para pontos diferentes: Lisboa não terá a mesma intensidade de tráfego do que, digamos, as Berlengas). Se for responsável pela construção de uma unidade fabril, quererá localizá-la de forma a minimizar a distância total aos clientes. Se quisermos localizar uma central de transportes (um aeroporto, por exemplo), um critério importante é minimizar a distância total aos centros populacionais servidos, ponderando cada um pela sua população.

Os exemplos multiplicam-se: saber resolver este problema pode, dependendo das circunstâncias, poupar milhões de euros. O seu interesse económico é claro.

Tentemos formalizar o problema. Temos um conjunto de  $n$  pontos no plano,  $X_1, \dots, X_n$ , com pesos  $p_1, \dots, p_n$ . Em geral, interessa per-

mitir que os pesos associados de pontos distintos sejam diferentes: significa que o número de clientes em cada ponto de distribuição  $X_i$  é variável. Se eu estiver a construir um armazém para distribuição de leite na região de Lisboa e Vale do Tejo, a importância económica do ponto Lisboa é muito maior do que, digamos, do ponto Bombarral: vou fazer muito mais vezes a viagem para Lisboa e, portanto, interessa-me reflectir a cidade de Lisboa com um peso maior (talvez proporcional ao número de habitantes).

Se eu situar o armazém num dado ponto  $(a, b)$  do plano, o custo associado  $C(a, b)$  será a soma, ponderada pelos pesos  $p_i$ , das distâncias dos pontos fixos  $X_i = (x_i, y_i)$  ao ponto  $(a, b)$ :

$$C(a, b) = \sum_{i=1}^n p_i \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2}. \quad (1)$$

O problema é, portanto, de optimização: o objectivo é escolher o ponto  $(a, b)$  de forma a minimizar o custo total  $C(a, b)$  dado pela equação (1).

Em primeiro lugar, é fácil concluir que existe um ponto de mínimo: quando o ponto  $(a, b)$  se afasta do domínio convexo definido pelos  $X_i$ , a função custo  $C$  cresce (naturalmente!) sem limite. Por continuidade, tem de ter um mínimo nesse domínio convexo. Esse mínimo é, portanto, uma "média espacial" e, ingenuamente, poderíamos supor que essa média é um centro de massa.

Não é! De facto, esse ponto tem propriedades muito diferentes e contra-intuitivas. Para ilustrar a situação, suponhamos, como na figura 1, que temos cinco cidades diferentes, dispostas num pentágono regular. Começamos com uma situação em que todas as cidades têm igual peso (20%); é óbvio, por simetria, que o ponto de mínimo, representado a vermelho, está no centro do pentágono.

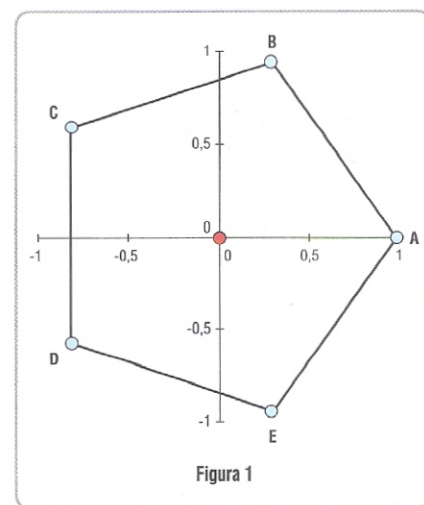


Figura 1

Façamos agora aumentar o peso relativo do ponto A, mantendo as outras quatro com peso igual entre si. Por simetria, o ponto óptimo estará sobre o eixo vertical. No entanto, desloca-se muito rapidamente à medida que o ponto A aumenta de peso. Na figura 2 está representada a sua localização quando o peso relativo de A é 43%: o ponto óptimo quase coincide com A!



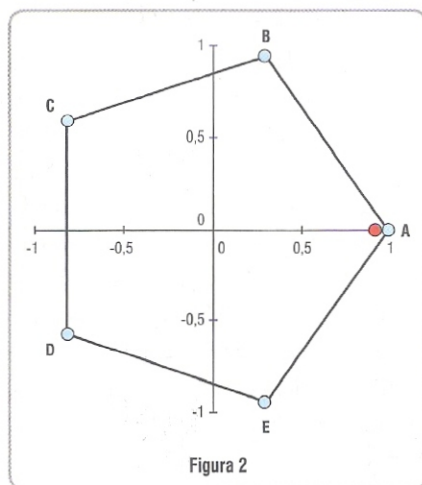


Figura 2

Na figura 3 representa-se, a vermelho, a forma como evolui a posição do ponto óptimo com o aumento do peso relativo de A: pouco antes de este atingir 45%, o ponto óptimo foi “absorvido” pelo ponto A. Tudo se passa como se os outros pontos simplesmente não existissem: o ponto óptimo já foi absorvido por A. Antes mesmo de o peso relativo de A ser 50%, o ponto óptimo já coincide com A. Pensando no significado desta situação em termos do problema original, o que se está a passar é extremamente contra-intuitivo:

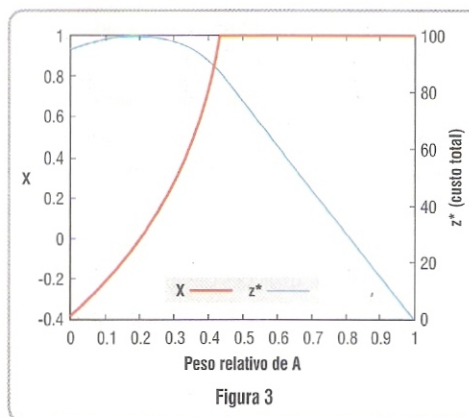


Figura 3

se o peso relativo de uma das cidades é suficientemente grande (e nem sequer esmagadoramente grande!), a localização óptima do armazém (ou aeroporto, ou fábrica) colapsa automaticamente nela.

Tudo se passa como se uma cidade, atingida uma dimensão crítica, funcionasse de forma “absorvente” e fizesse com que a solução para optimização de localização de recursos fosse... concentrar ainda mais recursos nela própria. O problema matemático em questão tem uma longa e ilustre história, tendo sido redescoberto várias vezes, e é conhecido como problema de Fermat-Weber, ou problema da me-

diana geométrica (nome que deriva de ser o análogo, no plano, da mediana numa distribuição unidimensional).

A essência do fenómeno contra-intuitivo de “absorção” por pontos suficientemente pesados provém do seguinte facto. Ao contrário do que uma consideração leviana poderia fazer pensar, a mediana geométrica (ou ponto de Fermat-Weber) *não* é o centro de massa do conjunto de pontos! De facto, o centro de massa C é o ponto que minimiza a soma (ponderada) *dos quadrados* das distâncias dos pontos  $X_i$  a C. O ponto de Fermat-Weber, pelo contrário, minimiza a soma ponderada *dos módulos* das distâncias, como se pode ver pela equação (1).

Este (aparentemente pequeno) pormenor faz toda a diferença. Para determinar o centro de massa, a aplicação do Cálculo Diferencial é imediata e as equações do centro de massa são lineares, tendo o comportamento “bonito” a que estamos habituados. As equações para o ponto de Fermat-Weber são, contudo, não-lineares: daí o comportamento distorcido das soluções.



Projectámos, fiscalizámos, gerimos e prestámos acompanhamento técnico a algumas das maiores obras de engenharia dos últimos 30 anos.

O GRUPO **CENOR**, presente em 3 continentes, presta um serviço de excelência em Consultoria de Engenharia, nos seguintes domínios: Energias Renováveis, Infra-estruturas, Hidráulica Agrícola e Urbana, Saneamento Ambiental, Parques e Unidades Industriais, Engenharia de Transportes, Estruturas e Fundações, Geotecnia e Obras de Arte.

Visite-nos em [www.cenor.pt](http://www.cenor.pt) e descubra a nova imagem de um grupo sólido e cada vez melhor preparado para responder a novos desafios.

**CENOR**  
Consulting Engineers



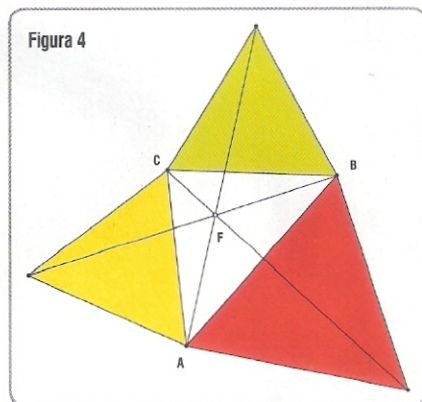
GRUPO **CENOR** - CENOR - Consultores, S. A. - CENORPLAN - Planeamento e Projectos, Lda. - CENOR - Projectos de Engenharia, Lda.  
ECG - Engenharia, Coordenação e Gestão, Lda. - ECGPLAN - Engenharia, Gestão e Planeamento, Lda.  
CENORGEOTEC - Engenharia Geotécnica, Lda. - CENOR - Açores, Lda. - CENOR - Consultores S.A. - Sucursal Angola



→ Pior: a função  $C(a,b)$  não é diferenciável no ponto de Fermat-Weber (pois a função módulo não possui derivada na origem), pelo que estamos perante um problema de optimização que *não* se resolve por aplicação cega do cálculo diferencial.

A distinção entre mediana geométrica (como é conhecida nos meios mais ligados à estatística) e centro de massa é subtil. No início do século XX o *Census Bureau* dos Estados Unidos cometeu o erro de os identificar, afirmando que o “ponto de distância mínima agregada” era o centro de gravidade das populações. Resultado: durante quase duas décadas o erro propagou-se a livros de demografia e estatística, sendo corrigido por volta de 1930 pelos matemáticos Eells e Gini.

O problema de Fermat-Weber originou-se, como o nome indica, com Pierre de Fermat no século XVII. Dado um triângulo, Fermat pede o ponto que minimiza a soma das distâncias aos vértices do triângulo. O problema foi resolvido pelo próprio Fermat, por Evangelista Torricelli e por vários outros matemáticos. O ponto óptimo (de Fermat) está no cruzamento das medianas dos triângulos equiláteros apoiados nas arestas do triângulo (figura 4).

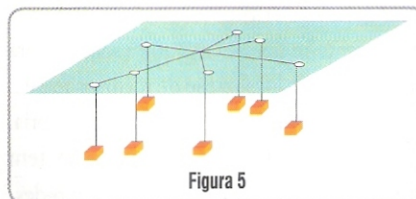


Esse ponto de Fermat tem a propriedade de “ver” todos os vértices do triângulo original a  $120^\circ$ . Note-se, em particular, o seguinte: se o triângulo possui um ângulo maior ou igual a  $120^\circ$ , então não existem pontos nestas condições, e o ponto de Fermat coincide com o vértice correspondente ao maior ângulo. Portanto, até no problema de Fermat surge o fenómeno de “absorção” do ponto óptimo!

O economista alemão Alfred Weber, irmão de Max Weber, reformulou, no início do século XX, o problema de Fermat como um problema de localização óptima, utilizando  $n$  pontos e pesos distintos, como interessa na interpretação económica do problema.

Foi o primeiro problema da classe a que se chama hoje *Facility location*.

O problema de Fermat-Weber permite uma solução mecânica interessante, dada originalmente pelo matemático francês Varignon (sécs. XVII-XVIII) e representada na figura 5. Num plano fazem-se  $n$  furos correspondentes às localizações das cidades  $X_1, \dots, X_n$ . Atam-se  $n$  fios num único nó, passando o fio  $i$  pelo furo correspondente a  $X_i$  e suspendendo-se dele o peso correspondente  $p_i$ . Então, atingido o equilíbrio, uma análise de forças mostra que a posição do nó estará no ponto de Fermat-Weber (fig. 5). Esta *armação de Varignon* chegou mesmo a ser utilizada, nalgumas circunstâncias, como computador analógico para resolver o problema de Fermat-Weber.



Se tiver inclinação para isso, o leitor pode observar todos os fenómenos contra-intuitivos do problema de Fermat-Weber construindo uma armação de Varignon. Por exemplo, se um dos pesos for maior do que a soma de todos os outros, o nó da armação de Varignon vai ser “sugado” – ou, na terminologia anterior, “absorvido” – pelo furo correspondente a esse peso.

Na verdade, como o nosso exemplo para  $n=5$  mostra, esta condição nem sequer é necessária para que um ponto seja “absorvente”. Por análise de forças, basta que a resultante das forças dos outros pesos seja menor ou igual do que o peso suspenso do furo em questão. Esta condição é suficiente para garantir que o ponto de Fermat-Weber é absorvido pelo furo. Isto pode mesmo acontecer se o peso correspondente for pequeno!

É possível mostrar que o problema geral de Fermat-Weber, ao contrário do problema dos centros de massa, não possui uma solução analítica (em radicais). Assim, os métodos aproximados revelam-se cruciais. Em particular, com o advento dos computadores digitais, os métodos iterativos para solução permitem hoje em dia calcular soluções aproximadas com um grau arbitrariamente elevado de precisão. Existem vários algoritmos para o fazer, sendo o mais utilizado o algoritmo de Weiszfeld.

São possíveis muitas generalizações úteis do problema de Fermat-Weber. Por exemplo, podemos querer não trabalhar no plano, mas no espaço (ou numa superfície esférica, se estivermos a pensar numa rede sísmológica de detecção de *tsunamis*) ou mesmo em dimensão  $n$ . Podemos querer ter vários armazéns a servir os pontos de procura (problema que tem o nome de *Multifacility location*). Podemos querer usar outras noções de distância que não a euclidiana (por exemplo, que leve em conta a rede de vias de transporte). E assim por diante.

Cada contexto poderá, naturalmente, dar origem a novos fenómenos possivelmente inesperados. No entanto, é interessante observar que o misterioso fenómeno da “absorção” do ponto óptimo por um dos pontos não está relacionado com este tipo de complexidade, surgindo no contexto mais simples possível: três pontos num plano, o humilde triângulo de Fermat. Em contextos mais complexos podem surgir mais paradoxos – mas este estará obrigatoriamente entre eles. Do ponto de vista económico, o fenómeno da absorção do ponto de Fermat-Weber mostra que, em problemas de localização de pontos de distribuição, existe uma dimensão crítica acima da qual a decisão mais racional de um agente económico é fazer coincidir o ponto de distribuição com o maior ponto de procura. Parece pouco democrático, mas nada tem a ver com questões ideológicas: é um resultado matemático.

Um pouco especulativamente, talvez seja esta a lógica do aparecimento de megametrópoles no Terceiro Mundo: enquanto nos países “ricos” existe um excedente para pagar o “prémio” de deslocalizar os armazéns para zonas industriais periféricas, preservando a qualidade de vida nas cidades, no Terceiro Mundo não existe esse excedente de recursos. A opção é, assim, pela solução mais barata: os pontos de distribuição concentram-se, de acordo com a absorção de Fermat-Weber, na maior das cidades, que em consequência se torna cada vez maior. Talvez até aos 20 milhões de habitantes de São Paulo ou Cidade do México. ■

O autor agradece a colaboração com o Prof. Miguel Casquilho, do IST, que lhe deu a conhecer o problema e autorizou a reprodução de alguns dos gráficos apresentados. A sua página [http://web.ist.utl.pt/mcasquilho/compute/\\_location/](http://web.ist.utl.pt/mcasquilho/compute/_location/) possui referências bibliográficas e recursos para realizar cálculos numéricos de Fermat-Weber em tempo real.