

Série 4

1. Uma onda transversal propagando-se numa corda vibrante muito longa é dada pela expressão

$$y(x, t) = 6 \times 10^{-2} \sin(2\pi x + 4.0\pi t)$$

onde x e y são expressos em metros e t em segundos.

- Determine a amplitude da onda.
- Qual o comprimento de onda e a frequência?
- Qual a velocidade de propagação ?
- Qual a direcção de propagação ?

Solução :

- $A = 6 \text{ cm}$
 - $\lambda = 1 \text{ m}, \quad f = 2 \text{ Hz}$
 - $v = 2 \text{ ms}^{-1}$
 - $\vec{n} = -\vec{e}_x$
2. Determine as frequências das ondas electromagnéticas que possuem os seguintes comprimentos de onda no vazio:
- 10^3 m (onda longa de rádio).
 - 1 m (onda curta de rádio).
 - 3 cm (micro-ondas).
 - 10^{-4} m (infra-vermelhos).
 - 5000 \AA (luz visível)

- f) 0.1 \AA (raios X).
 g) 10^{-2} \AA (raios γ)

Solução : a) $f = 3 \times 10^5 \text{ Hz}$ b) $f = 3 \times 10^8 \text{ Hz}$ c) $f = 10^{10} \text{ Hz}$ d) $f = 3 \times 10^{12} \text{ Hz}$ e) $f = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ f) $f = 3 \times 10^{19} \text{ Hz}$ g) $f = 3 \times 10^{20} \text{ Hz}$

3. É conhecido o campo eléctrico duma onda plana electromagnética propagando-se num meio dieléctrico ($\mu_r = 1$, $\varepsilon = ?$),

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= -0.4 \times 10^{-9} \cos \left[5 \times 10^5 t - 2 \times 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y + \frac{\sqrt{2}}{2} z \right) \right] \\ E_z &= 0.4 \times 10^{-9} \cos \left[5 \times 10^5 t - 2 \times 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y + \frac{\sqrt{2}}{2} z \right) \right] \quad (\text{V/m}) \end{aligned}$$

onde t é dado em segundos e z em metros.

- a) Qual a direcção e sentido da propagação da onda ? (Represente num sistema de eixos (x, y, z) o vector \vec{n}). Verifique que $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$
 b) Qual o índice de refacção do meio ?
 c) Qual o comprimento de onda ?
 d) Qual a polarização da onda ?

Solução :

- a) $\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$
 b) $n = 1,2$
 c) $\lambda = 3141,6 \text{ m}$
 d) *Linear*

4. Uma onda plana electromagnética propaga-se num meio não condutor ($\mu_r = 1$, $\sigma = 0$ e $\vec{J} = 0$). O campo \vec{H} é dado por:

$$\begin{aligned} H_x &= -3 \times 10^{-3} \cos(8 \times 10^6 t - 3.4 \times 10^{-2} z) \\ H_y &= 2 \times 10^{-3} \sin(8 \times 10^6 t - 3.4 \times 10^{-2} z) \\ H_z &= 0 \quad (A/m) \end{aligned}$$

(Nas expressões anteriores t é dado em segundos e z em metros)

- Qual a constante dieléctrica do meio em que se propaga a onda?
- Escreva as componentes do campo eléctrico \vec{E} e descreva a polarização da onda.
- Qual o comprimento de onda ?

Solução :

a) $\epsilon_r = 1,63$

b)

$$\begin{aligned} E_x &= 5,9 \times 10^{-1} \sin(8 \times 10^6 t - 3.4 \times 10^{-2} z) = \\ &= E_{0x} \sin(8 \times 10^6 t - 3.4 \times 10^{-2} z) \\ E_y &= 8,8 \times 10^{-1} \cos(8 \times 10^6 t - 3.4 \times 10^{-2} z) = \\ &= E_{0y} \cos(8 \times 10^6 t - 3.4 \times 10^{-2} z) \\ 1 &= \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2}; \quad \textit{Elíptica} \quad (V/m) \end{aligned}$$

c) $\lambda = 184,8m$

5. É conhecido o campo eléctrico duma onda plana electromagnética propagando-se num meio dieléctrico ($\mu_r = 1$, $\epsilon = ?$):

$$E_x = 0$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = 2 \times 10^{-6} \cos \left[6 \times 10^5 t - 3 \times 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y \right) \right] \quad (V/m)$$

(Nestas expressões t é dado em segundos , x e y em metros)

- Qual o índice de refração do meio?
- Qual a direcção e sentido da propagação da onda?
- Calcule o campo \vec{H} da onda.
- Qual a polarização da onda?

Solução :

a) $n = 1,5$

b) $\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y$

c)

$$H_x = -7,3 \times 10^{-9} \cos \left[6 \times 10^5 t - 3 \times 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y \right) \right] \quad (A/m)$$

$$H_y = -7,3 \times 10^{-9} \cos \left[6 \times 10^5 t - 3 \times 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y \right) \right]$$

$$H_z = 0$$

d) *Linear*

6. Uma onda e.m. plana propaga-se num meio não condutor com $\mu_r = 1$. Apresenta o seguinte campo eléctrico:

$$\vec{E} = 0.5 \cos \left[6.5 \times 10^6 t - 3.1 \times 10^{-2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2} z \right) \right] \vec{e}_x \quad (V/m)$$

- a) Defina a direcção e o sentido da propagação da onda.

- b) Qual o índice de refração do meio?
- c) Determine o seu campo magnético \vec{H} .
- d) Qual a polarização da onda?
- e) Determine o vector de Poynting \vec{S} .

Solução :

a) $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_z$

b) $n = 1.43$

c)

$$H_x = 0$$

$$H_y = -9,5 \times 10^{-4} \cos \left[6.5 \times 10^6 t - 3.1 \times 10^{-2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2} z \right) \right] \quad (A/m)$$

$$H_z = -1,6 \times 10^{-3} \cos \left[6.5 \times 10^6 t - 3.1 \times 10^{-2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2} z \right) \right]$$

d) *Linear*

e)

$$\vec{S} = 9,5 \times 10^{-4} \cos^2 \left[6.5 \times 10^6 t - 3.1 \times 10^{-2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2} z \right) \right] \vec{n} \quad (W.m^{-2})$$

7. O campo magnético de uma onda e.m. plana propagando-se num meio com $\mu_r = 1$, é dado por

$$H_x = 6 \times 10^{-3} \sin(7.5 \times 10^6 t - 3 \times 10^{-2} y)$$

$$H_y = 0$$

$$H_z = -6 \times 10^{-3} \cos(7.5 \times 10^6 t - 3 \times 10^{-2} y) \quad (A/m)$$

onde t é expresso em segundos e y em metros.

- a) Qual a direção de propagação ?

- b) Qual o índice de refração do meio?
- c) Descreva a polarização da onda?

Solução :

- a) $\vec{n} = \vec{e}_y$
- b) $n = 1,2$
- c) *Circular direita*

8. Verifique que, quando uma onda passa através de um meio limitado por lados planos e paralelos, a direcção de propagação do raio emergente é paralela à do raio incidente e calcule o deslocamento lateral dos raios em função da distância entre os planos.

Solução : $\Delta = d \frac{|\sin(i-r)|}{\cos r}$

9. Uma onda plana de rádio, polarizada linearmente, propaga-se no vácuo na direcção xx com o vector \vec{E} na direcção yy . A sua frequência é $f = 1$ MHz. A potência média propagada pela onda, por unidade de área, é 20 Watt/m^2 .

- a) Determine o comprimento de onda.
- b) Determine as amplitudes de \vec{E} e \vec{H} .
- c) Escreva as expressões analíticas de \vec{E} e \vec{H} .

Solução :

- a) $\lambda = 300 \text{ m}$
- b) $E_0 = 122,8 \text{ V/m}; \quad H_0 = 0,33 \text{ A/m}$
- c)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \cos(2\pi \times 10^6 t - 2.09 \times 10^{-2} x) \vec{e}_y \quad (\text{V/m}) \\ \vec{H} &= H_0 \cos(2\pi \times 10^6 t - 2.09 \times 10^{-2} x) \vec{e}_z \quad (\text{A/m}) \end{aligned}$$

10. Uma nave a 30000 Km da Terra possui um emissor de 10 W emitindo isotropicamente a uma frequência de 2 GHz. Calcule o valor médio do vector de Poynting e o valor de pico do campo eléctrico à superfície da Terra.

Solução : $\langle \vec{S} \rangle = 1.1 \times 10^{-14} \text{ W/m}; \quad E_0 = 2.88 \times 10^{-6} \text{ V/m}$

11. A Terra recebe do Sol cerca de 1.5 KW/m^2 (potência integrada sobre todas as frequências).
- a) Qual é potência total emitida pelo Sol, supondo que radia isotropicamente ? (Distância Terra-Sol = $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$).
 - b) Qual a potência total recebida pela Terra?
 - c) Se a massa do Sol for $2 \times 10^{30} \text{ Kg}$, e se esta for convertida em energia radiante com eficiência de 1%, qual o tempo de vida do Sol, supondo que ele continua a radiar à taxa actual ?

Solução :

- a) $4,24 \times 10^{26} \text{ W}$
- b) $1.9 \times 10^{17} \text{ W}$
- c) $T = 4.25 \times 10^{11} \text{ anos} > \text{ Idade do Universo} \approx 1,5 \times 10^{10} \text{ anos}$

12. Uma fonte pontual emite ondas esféricas. A intensidade a uma certa distância da fonte é 25 W/m^2 . A intensidade noutro ponto 10 m mais afastado da fonte é 16 W/m^2 .

- a) Qual a distância da fonte ao primeiro ponto?
- b) Qual é a potência da fonte?

Solução :

- a) $r_1 = 40 \text{ m}$
- b) $P = 5,0 \times 10^5 \text{ W}$