Electromagnetismo e Óptica
Primeiro Semestre 2007

Série 1

1. Considere 2 cargas pontuais: $q_1 = 15\mu C, q_2 = 6\mu C$ colocadas respectivamente nos pontos $\vec{r}_1 \equiv (2m, 0m)$ e $\vec{r}_2 \equiv (0m, 0m)$. A que distância de q_2 deverá ser colocada uma carga $q_3 < 0$, de modo a que a força resultante seja nula?

2. O electrão e o protão no átomo de hidrogéneo estão separados por uma distância 5×10^{-11}m. Compare a grandeza da força eléctrica e da força gravitacional entre eles.

   $G = 6.7 \times 10^{-11}\ Nm^2Kg^{-2},\ m_e = 9.11 \times 10^{-31}\ Kg,\ m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ Kg,\ q_e = -1.6 \times 10^{-19}\ C,\ (4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9 \times 10^9\ Nm^2C^{-2}$

3. Considere duas cargas pontuais $q_1 = 7\mu C, q_2 = -5\mu C$ colocadas respectivamente nos pontos $\vec{r}_1 = (0m, 0m), \vec{r}_2 = (0.3m, 0m)$.

   a) Determine o campo eléctrico no ponto P$(0m, 0.4m)$

   b) Qual a força eléctrica exercida sobre uma carga de $2 \times 10^{-8}C$ colocada no ponto P?

4. Considere uma barra estreita e comprida, com L=2 m de comprimento e uma densidade linear de carga $\lambda = 1\ \mu C/m$.

   a) Calcule a força exercida pela barra sobre uma carga de q=2 μC, situada a uma distância a=2 m de um extremo da barra.

   b) Considerando o sistema barra+carga, qual é a posição do ponto P, i.e. a distância d (medida a partir da extremidade da barra), em que o campo eléctrico é nulo?

   c) Qual seria a posição de P, se o comprimento da barra aumentasse indefinidamente no sentido oposto ao da posição da carga q, mantendo a densidade de carga constante?

Solução : $a)\ F = 4.5 \times 10^{-3}\ N \qquad b)\ d = 0.667\ m \qquad c)\ d = 0.76\ m$

5. Uma carga Q está distribuída uniformemente com uma densidade ρ numa esfera de raio R. Determine as expressões do potencial V e do campo $\vec{E}$ à distância r do centro da esfera, para pontos interiores e exteriores à esfera.

   Solução :

$$\begin{aligned} r > R \qquad \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\ ; \qquad \phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ r < R \qquad \vec{E} &= \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{e}_r\ ; \qquad \phi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

6. Use coordenadas cilíndricas para calcular o campo eléctrico devido a um disco de raio a, uniformemente carregado com uma densidade de carga σ, num ponto do eixo do disco a uma distância z do seu centro. Utilize este resultado para deduzir o campo devido a um plano infinito uniformemente carregado com a mesma densidade (σ).

   Solução : $\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{e}_z$

7. Considere uma carga Q distribuída numa esfera de raio R com a densidade

$$\rho = A(R - r) \qquad (C/m^3), \qquad 0 \le r \le R$$

   a) Determine a constante A em função de Q e R.

   b) Calcule o campo eléctrico dentro e fora da esfera.

   c) Verifique a continuidade do campo eléctrico sobre a superfície esférica.

   d) Verifique a equação de Poisson.

   Solução : $a)\ A = \frac{3Q}{\pi R^4} \qquad b)\ \vec{E}_{int} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^4}(4R - 3r)\vec{e}_r, \qquad \vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

8. Um condutor esférico de raio a possui uma carga Q. Este condutor está rodeado por uma superfície esférica condutora de raio b, ligada à terra através de uma bateria cuja diferença de potencial é V_1.

   a) Determine a carga total sobre as superfícies interior e exterior da esfera de raio b.

   b) Determine o campo e o potencial á distância r do centro das duas esferas,sendo $r \leq a$, $b \leq r$, $a \leq r \leq b$.

   Solução : *a)* $Q_b = 4\pi\varepsilon_0 b V_1 - Q$

   b)

$$\begin{aligned} r > b \qquad \vec{E} &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{Q+Q_b}{r^2}\vec{e}_r \ ; \quad \phi = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{Q+Q_b}{r} \\ a < r < b \qquad \vec{E} &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{Q}{r^2}\vec{e}_r \ ; \quad \phi = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\tfrac{Q}{r} + \tfrac{Q_b}{b}) \\ r < a \qquad \vec{E} &= 0 \ ; \quad \phi = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\tfrac{Q}{a} + \tfrac{Q_b}{b}) \end{aligned}$$

9. Um cabo coaxial é constituído por dois condutores infinitos cuja secção transversal é um círculo de raio R_1 rodeado de uma coroa circular de espessura $R_3 - R_2$. Suponha que o condutor exterior està ligado à terra e que o interior está ao potencial V.

   a) Determine o potencial e o campo eléctrico no espaço entre os condutores.

   b) Determine a carga por unidade de comprimento (λ) do condutor interior.

   c) Determine a energia eléctrica por unidade de comprimento.

   Solução :

   a) $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r, \qquad \phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{R_2}{r}$

   b) $\lambda = 2\pi\varepsilon_0 V \ln^{-1}\frac{R_2}{R_1} \qquad$ *c)* $W_e = \lambda^2 4\pi\varepsilon_0 \ln^{-1}\frac{R_2}{R_1}$

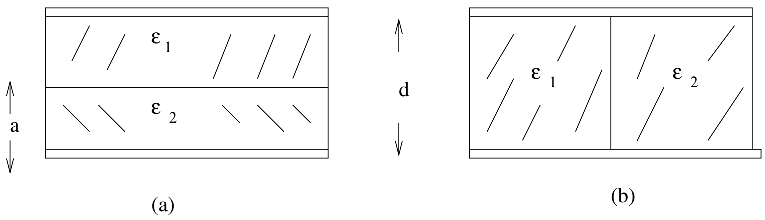
10. Dois condensadores de capacidades C_1 e C_2, um carregado outro não, são ligados em paralelo.

    Mostre que no equilíbrio se verificam as seguintes relações:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{C_1}{C_1+C_2}$$
$$\frac{Q_2}{Q} = \frac{C_2}{C_1+C_2}$$

    onde Q é a carga inicial do condensador carregado e Q_1 e Q_2 as cargas finais de cada um deles.

11. Calcule capacidades dos dois condensadores representados na figura (ϵ_1 e ϵ_2 são as constantes dieléctricas dos meios considerados).



    Solução : $C_a = \frac{A}{\frac{a}{\varepsilon_1}+\frac{d-a}{\varepsilon_2}}$, $C_b = \varepsilon_1 \frac{A_1}{d} + \varepsilon_2 \frac{A_2}{d}$

12. Considere dois condensadores com capacidade C ligados em paralelo a um potencial inicial V_1. Suponha que se introduz num deles um dieléctrico de constante $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$. Calcule o novo potencial a que ficam os condensadores bem como a carga que vai fluir no circuito.

    Solução : $V_f = \frac{2V_1}{\varepsilon_r+1}$; $\quad Q = CV_1 \, \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}$

13. Uma esfera de raio R encontra-se polarizada uniformemente, tendo o vector de polarização $\vec{P}$ a direção do eixo dos zz. Escreva a expressão para a carga superficial de polarização de um anel da superfície esférica cujo raio vector faça um ângulo θ com o eixo dos zz. Obtenha, por integração, a carga positiva total de polarização. Qual é a carga total de polarização na superfície da esfera?

Solução : $dQ = P \cos\theta \; 2\pi r^2 \; \sin\theta \; d\theta; \qquad Q^+ = \pi r^2 P \; ; \qquad Q_t = 0$

14. Calcule a energia armazenada num sistema de 4 cargas pontuais idênticas, Q=4 nC, situadas nos vértices de um quadrado de 1 m de lado. Qual é a energia armazenada no sistema quando só duas cargas estão colocadas e em vértices opostos?

    Solução : $W_E = 780 \; nJ \; ; \qquad W_{2q} = 102 \; nJ$

15. Sejam duas cargas iguais em módulo e de sinais opostos separadas de uma distância L. Considere o eixo do dipolo orientado segundo o eixo dos xx, sendo a origem O deste eixo coincidente com o centro do dipolo.

    a) Usando a expressão para o potencial de uma carga pontual, calcule o trabalho que é necessário realizar para trazer uma carga +Q do infinito até um ponto S sobre o eixo dos xx, sendo [OS]=x.

    b) Escreva uma expressão aproximada para o potencial em S, que seja válida para x muito maior que L.

    c) Determine a orientação da superfície equipotencial no ponto S.

    d) Diga qual a superfície equipotencial que é um plano e indique o valor do potencial nesse plano.

    Solução : $a) \; \frac{Qp}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4x^2 - L^2} \qquad b) \; \phi \approx \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{1}{x^2}$

16. Uma esfera metálica de raio R está isolada de outros corpos. Exprima o potencial sobre a esfera em função da sua carga. Determine o trabalho necessário para carregar a esfera com a carga Q.

    Solução : $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{1}{R} \; ; \qquad W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

17. Determine a velocidade de um electrão que é acelerado através de uma diferença de potencial V.

    Solução : $v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$

18. Considere o sistema de 2 condensadores descrito no Problema 10. Mostre que a energia final armazenada no sistema é menor que a energia inicial e deduza uma expressão para a diferença entre as duas energias em termos de Q e de C_1 e C_2.

    Solução : $W_f - W_i = -\frac{1}{2}\ Q^2\ \frac{C_2}{C_1(C_1+C_2)}$

19. Determine a energia potencial de uma esfera de raio R e carga total Q, uniformemente carregada. Solução: $W = 3Q^2/20\pi\varepsilon_0 R$

20. Considere um dipolo de momento dipolar $\vec{p} = q\vec{a}$ (Cm), que faz um ângulo θ com a direcção de um campo eléctrico uniforme $\vec{E}$.

    a) Calcule o momento da força que actua o dipolo.

    b) Calcule o trabalho necessário para inverter a posição de equilíbrio do dipolo em presença do campo $\vec{E}$.

    c) Considerando que o dipolo tem um momento de inércia I em relação ao seu centro, calcule o período de oscilação do dipolo, para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.

    Solução :

    $a)\ |\vec{N}| = |\vec{p}||\vec{E}|\ \sin\theta \qquad b)\ W = 2|\vec{p}||\vec{E}| \qquad c)\ T = \sqrt{\frac{4\pi^2\ I}{|\vec{p}||\vec{E}|}}$