

Série 0: Operadores Diferenciais e Sistemas de Coordenadas

1. Um campo de forças é dado por: $\vec{F} = 2xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y$.
 - a) Mostre que a força \vec{F} é conservativa.
 - b) Determine o trabalho realizado por \vec{F} durante o deslocamento de um ponto material de $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ a $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.
 - c) Diga, justificando, qual a energia potencial $V(x,y,z)$ associada à força \vec{F} . Verifique que: $\vec{F} = -\text{grad } V$.

2. Considere o campo vectorial $\vec{C} = \vec{r}$. Seja S uma superfície fechada que envolve o volume V. Mostre que o fluxo de \vec{C} através de S é igual a 3 V.

3. Considere o campo vectorial $\vec{C} = 2z\vec{e}_z$ e um paralelepípedo de lados L_1, L_2, L_3 .
 - a) Diga por que razão só o fluxo através dos lados perpendiculares a zz é diferente de zero.
 - b) Verifique que o teorema da divergência é válido para este caso.

4. Considere no plano xoy um rectângulo s com 5 cm de altura e 10 cm de largura. Designe por S uma superfície qualquer que tenha por bordo o perímetro do rectângulo. Seja $\vec{\alpha}$ um campo vectorial definido por

$$\vec{\alpha} = \lambda y\vec{e}_x - \lambda x\vec{e}_y$$

onde λ é um real. Verifique que

$$\int_s \vec{\alpha} \cdot d\vec{s} = \int \int_S \text{rot} \vec{\alpha} \cdot \vec{N} dS$$

onde \vec{N} é a normal à superfície S que esteja de acordo com o sentido da circulação ao longo do rectângulo s.

5. Atendendo à configuração das linhas de força, indique se a divergência e o rotacional dos campos seguintes são ou não nulos:
- a) campo uniforme.
 - b) campo radial, inversamente proporcional ao quadrado da distância à origem.
 - c) campo radial inversamente proporcional à distância à origem.
 - d) campo plano, cujas linhas de força são circunferências de centro num ponto do plano e cuja intensidade é inversamente proporcional à distância a esse centro.
 - e) campo existente no plano yoz dirigido segundo z , aumentando com z e diminuindo com y .
 - f) campo plano, cujas linhas de força são circunferências de centro num ponto do plano. A intensidade do campo é directamente proporcional à distância ao centro.