

Astrofísica

III Série de Problemas

Prof. Orfeu Bertolami

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física
Março 2003

1) Estudos de dados de eclipses dos últimos 2000 anos indica que a relação entre o tempo das efemérides, T , o tempo sideral, t , é dado por:

$$T = t + \alpha t^2 + \dots \quad , \quad (1)$$

onde α é igual a 30 segundos/(século)². Decorre do facto de ser α positivo que o dia sideral e o dia solar médio ficam mais longos. Mostre que a duração dum dia aumenta à taxa de 0.00164 segundos por século.

2) Demonstre que a generalização tensorial da energia potencial gravítica

$$\Omega_{ik} = -\frac{G}{2} \int_V \int_V \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') (x_i - x'_i)(x_k - x'_k) d^3r d^3r' / |\vec{r} - \vec{r}'|^3 \quad (2)$$

é simétrica e pode ser escrita em termos do potencial gravítico

$$\phi(\vec{r}) = -G \int_V \rho(\vec{r}') d^3r' / |\vec{r} - \vec{r}'| \quad , \quad (3)$$

como

$$\Omega_{ik} = -\frac{G}{2} \int_V \int_V \rho(\vec{r}) x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_k} d^3r = -\frac{G}{2} \int_V \int_V \rho(\vec{r}) x_k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d^3r \quad . \quad (4)$$

3) Demonstre que

$$\int_V \rho(\vec{r}) \frac{d}{dt} \left[x_k \frac{dx_i}{dt} \right] d^3r = \frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ik}}{dt^2} \quad , \quad (5)$$

onde I_{ik} corresponde à generalização tensorial momento de inércia

$$I_{ik} = \int_V \rho(\vec{r}) x_i x_k d^3r . \quad (6)$$

4) Para o aglomerado das Pleides estima-se que $\langle R \rangle \simeq 3.5 \text{ pc}$ e $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \simeq 0.43 \text{ km/s}$. Mostre então, que a massa do sistema é aproximadamente $300 M_\odot$, o que é consistente com a observação de ser o sistema constituído por centenas de estrelas.

5) Usando a condição de equilíbrio hidrostático para uma estrela e a equação de Poisson, mostre que se $P = K\rho^{(n+1)/n}$, onde K é uma constante e n o índice politrópico, então o potencial gravítico é dado pela seguinte expressão:

$$\phi = -\frac{GM}{R} - (n+1)\frac{P}{\rho} . \quad (7)$$

6) A condição de Jeans para o colapso duma estrela pode ser obtida assumindo que a auto-energia gravitacional duma nuvem de gás de raio, R , massa, M , contendo N partículas de massa média, m , a temperatura T , supera a energia cinética térmica da nuvem, ou seja:

$$|E_{GR}| > E_C , \quad (8)$$

onde

$$E_{GR} = -f\frac{GM^2}{R} \quad (9)$$

e

$$E_C = \frac{3}{2}NkT . \quad (10)$$

Para uma nuvem esférica uniforme, $f = 3/5$, donde segue a definição da massa de Jeans acima da qual ocorre o colapso gravitacional:

$$M_J = \frac{5 kTR}{2 Gm} . \quad (11)$$

Use esta condição para verificar se o aglomerado globular *M13* na constelação de Hércules, que contém meio milhão de estrelas com massas da ordem de meia massa solar, pode ter sido formado logo após a *Recombinação* quando a densidade do Universo era $\rho \simeq 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ e a temperatura $T \simeq 10^4 \text{ K}$.