Astrofísica

II Série de Problemas

Prof. Orfeu Bertolami

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física
Fevereiro 2003

1) Obtenha a Lei de Hubble por meio:

a) Da métrica de Robertson-Walker.

b) Do argumeto de simetria decorrente do Princípio Cosmológico no limite $v << c$. Para tal considere um triângulo definido por três pontos num espaço homogêneo e isotrópico A, B e C, tal que as velocidades de B e C com relação a A sejam respectivamente $\vec{v}(\vec{r})$ e $\vec{v}(\vec{d})$. A velocidade de C com relação a B é $\vec{v}\,'(\vec{r}\,') = \vec{v}(\vec{r}) - \vec{v}(\vec{d})$, porém do Princípio Cosmológico segue que:

$$\vec{v}(\vec{r} - \vec{d}) = \vec{v}\,'(\vec{r} - \vec{d}) = \vec{v}(\vec{r}) - \vec{v}(\vec{d})$$

que implica na Lei de Hubble assumindo-se que o campo de velocidades é irrotacional.

2) Demonstre a relação entre o desvio para o vermelho do comprimento de onda, λ da radiação emitida por uma fonte distante e o comprimento de onda observado, λ_0,

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$$

e o factor de escala, $a(t)$ da métrica de Robertson-Walker:

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} \quad ,$$

onde $a_0 \equiv a(t_0)$.

3) Para tempos cósmicos, t, suficientemente próximos da idade do Universo, t_0, o factor de escala da métrica de Robertson-Walker pode ser expandido em série de potências:

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + ... \right] \quad ,$$

onde

$$H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a_0}$$

é chamada constante de Hubble e

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0) a_0}{\dot{a}(t_0)^2}$$

é o parâmetro de desaceleração.

Obtenha por meio desta expansão:

a) Uma expressão para o desvio para o vermelho.

b) Uma expressão para o tempo de vôo dum fotão emitido em t em termos do desvio para o vermelho.

c) O primeiro termo da expansão da função

$$f(r) \equiv \int_0^r \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} \quad ,$$

onde k é índice de curvatura, em termos do desvio para o vermelho. Com base na sua resposta escreva a expressão para a distância $d_P = a_0 r$ que é utilizada pelos astrónomos quando do cálculo da distância de fontes muito afastadas, porém para as quais $z << 1$.

4) Astrónomos são capazes de definir classes de objectos para os quais a luminosidade absoluta, L, é conhecida. Através da medida da luminosidade aparente, l, obtêm que estes objectos se encontram afastadas de nós a uma distância

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2} \quad .$$

Com esta informação responda às seguintes questões:

a) Qual é a expressão da luminosidade aparente em função de L, z, H_0 e q_0 ?

b) Mais frequentemente os astrónomos preferem falar em termos de magnitudes ao invés de luminosidades. A escala de magnitudes é definida logaritmicamente considerando-se que um factor 100 no fluxo recebido corresponde a uma diferença de 5 magnitudes. Historicamente convencionou-se que a magnitude aparente, m, da estrela Polar é 2.12 no visível. A magnitude absoluta, M, é definida como sendo a magnitude aparente que uma fonte teria se fosse colocada a uma distância de 10 $parsec$ ($1pc = 3.26\ anos - luz$). Assim, a relação entre a distância e as magnitudes aparente e absoluta é dada pela expressão

$$d_L = 10^{1+(m-M)/5}\ pc \quad ;$$

e a quantidade

$$m - M = -5 + 5\ log\ d_L(pc)$$

é denominada módulo de distância (distance modulus). Obtenha com base nos resultados da alínea **a** uma expressão para esta grandeza em função dos parâmetros cosmológicos relevantes.

5) Mostre que a equação de Friedmann corresponde à primeira integral do movimento da expansão do Universo que é descrita pela equação de Raychaudhury. Para maior generalidade da sua resposta inclua a constante cosmológica. Sem resolver a equação de Friedmann discuta os movimentos possíveis para o Universo em função do índice de curvatura (considere $\Lambda = 0$ neste caso).