Astrofísica

I Série de Problemas

Prof. Orfeu Bertolami

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física
Maio 2009

1. Em 1766 Johann Daniel Titius von Wittenberg ao preparar a tradução para o alemão da obra *Centemplation de la Nature* de Charles Bennet adicionou uma famosa nota de rodapé no capítulo dedicado aos movimentos planetários. Segundo esta o raio médio de todas as órbitas planetárias podia ser gerado pelo algoritmo (o raio é considerado em Unidades Astronómicas, $1AU = 1.496 \times 10^{11} m$):

$$r_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n \ , \ \ n = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

Surpreendentemente esta fórmula reproduz com boa precisão a distância média do Sol dos seis planetas então conhecidos: Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno (Mercúrio correspondendo a $r = 0.4$).
Em 1772Johann Bode deparou com a nota de Titius e introduzia-a na nova edição do seu livro de astronomia sem qualquer menção a Titius. Assim, o nome de Bode está até hoje erroneamente associado a esta lei empírica.

a) Demonstre que a lei de Titius reproduz aproximadamente as distâncias dos seis planetas então conhecidos e cujos valores observados são respectivamente: Mercúrio ($0.39AU$), Vénus ($0.72AU$), Terra ($1AU$), Marte ($1.52AU$), Júpiter ($5.2AU$) e Saturno ($9.55AU$).

b) Demonstre que a lei de Titius faz duas previsões interessantes:

i) A distância de Urano ($r_6 \simeq 19.2AU$) - este planeta deve seu nome a Bode depois de ser descoberto por Herschel em 1781.

ii) Que na lacuna entre Marte e Júpiter ($r_3 \simeq 2.8AU$) deveria existir um planeta. Sabemos hoje que a esta distância do Sol encontram-se os asteróides, muito possivelmente gerados pela desintegração dum planeta ali presente.

c) Demonstre que a lei de Titius falha consideravelmente no que se refere às órbitas de Neptuno ($30.1AU$) e Plutão ($39.5AU$).

2. Demonstre com base na equação que relaciona as coordenadas polares e as grandezas dinâmicas do movimento duma partícula de massa m, momento angular L, submetida uma força central

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m^2 r^4}{L^2}\left[\frac{2(E - E_p(r))}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2}\right] \tag{2}$$

e a equação duma cónica em coordenadas polares com a origem num dos focos

$$\frac{\epsilon d}{r} = 1 + \epsilon \cos\theta \ , \tag{3}$$

sendo ϵ a excentricidade e d a distância do foco à directriz, que decorre da primeira lei de Kepler a exigência que a força actuando sobre a partícula seja proporcional a $1/r^2$.

3. Com base na informação do problema anterior relacione o momento angular e a energia total com a distância do semi-eixo maior, a, e a excentricidade no caso do movimento elíptico.

4. Verifique que a terceira lei de Kepler é válida para órbitas elípticas.

5. A massa e o raio dum planeta podem ser estimados por meio de considerações bastante gerais. Considere primeiramente a auto-energia de origem gravitacional dum planeta de massa M, raio R, constituído por N moléculas de peso atómico, A:

$$E_G \simeq \frac{GM^2}{R} \simeq \frac{GA^2 m_N^2 N^2}{R} \ , \tag{4}$$

onde m_N é a massa de um nucleão.
De seguida imagine que a estabilidade do objecto é estabelecida pelo equilíbrio entre a interacção gravitacional e pressão electrostática de electrões num estado degenerado, que energeticamente é estimada como sendo proporcional a $N\alpha^2 m_e$, onde $\alpha \equiv e^2/\hbar c = 1/137$ é a conhecida constante de estrutura fina e m_e a massa do electrão. Demonstre então que o raio do planeta é dado por

$$R \simeq NA^2 \left(\frac{\alpha_G}{\alpha}\right) a_0 \ , \tag{5}$$

onde $\alpha_G \equiv Gm_n^2/\hbar c$ e $a_0 = e^2/\alpha^2 m_e$, ou alternativamente por

$$R \simeq \left(\frac{\alpha_G}{\alpha}\right)^{-1/2} \frac{a_0}{A} \sim \frac{0.7}{A} \times 10^6 km \ . \tag{6}$$

Demonstre que esta expressão é uma boa estimativa para o raio da Terra, $R_\bigoplus$, assumindo que esta é constituida essencialmente de quartzo (dióxido de sílicio). Mostre também que a estimativa decorrente para a massa da Terra, $M_\bigoplus \simeq 6 \times 10^{24} kg$, é razoável. use para a densidade,

$$\rho_{AT} \simeq \frac{Am_N}{(4\pi/3)a_0^3} \sim A\alpha^3 m_N m_e^3 \sim 0.04 Agcm^{-3} \ . \tag{7}$$

Note também que a estimativa para a massa é bastante satisfatória para os planetas da sequência, Saturno, Urano, Neptuno e Júpiter, cujas densidades variam entre $0.17 - 1.7 gcm{-}3$. A massa de Júpiter é por exemplo, $M_J \simeq 1.9 \times 10^{27} kg$.