

O método de Monte Carlo na prática do Contrôle de Qualidade



estg
escola superior
de tecnologia
e gestão

Jornada de Matemática

Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Instituto Politécnico de Portalegre

Portalegre, 19 de Maio de 2004



Miguel Casquilho

Eng.º Químico (IST, 1971); Ph. D., Eng.º Quím. (IST, 1985)

Professor Aux., Departamento de Eng.º Química

Instituto Superior Técnico

Universidade Técnica de Lisboa



<http://alfa.ist.utl.pt/~mcasquil>

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

1 / 48

O método de Monte Carlo na prática do Contrôle de Qualidade

Ensino em Licenciatura

- «Contrôle de Qualidade»
- «Investigação Operacional»
- «Computação»
- ...

Ensino em Mestrados

- «Métodos numéricos» (UTL)
- Q. na Construção (part., DECivil, IST)
- «Contrôle de Q.» (U. da Beira Interior)
- «Distribuição Física» (part., U. Lusitana)
- «Gestão da Q.» (U. dos Açores)
- «Contrôle de Q.» (IST)



19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

2 / 48

O método de Monte Carlo na prática do Contrôle de Qualidade

1. Qualidade e CQ: o que são.
2. Contrôle de aceitação
3. Variável gaussiana
4. Duas variáveis simples
5. Expectativas

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

3 / 48

O método de Monte Carlo na prática do Contrôle de Qualidade

1. **Qualidade e CQ: o que são.**
2. Contrôle de aceitação
3. Variável gaussiana
4. Duas variáveis simples
5. Expectativas

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

4 / 48

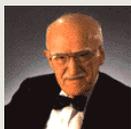
1. Qualidade e CQ: o que são.



Walter Andrew SHEWHART
1891 – 1967



William Edwards DEMING
1900 – 1993



Joseph M. JURAN
1904 –

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

5 / 48

1. Qualidade e CQ: o que são.

- **Qualidade** [Jur1988]
 - É o conjunto de *características* dum **produto** que vai ao encontro dos **requisitos do cliente**, gerando assim satisfação com o produto.
 - Consiste na isenção de **deficiências**.
 - É a **conformidade com as especificações**.
- **Produto**: resultado dum processo —mercadoria (açúcar), objecto (lápis, televisão), serviço (atendimento, electricidade).
- **Característica**: propriedade de interesse (dimensão dum produto, viscosidade dum produto, consumo dum automóvel).
- **Requisito do cliente** Para o cliente externo, gera satisfação e vendabilidade; para o cliente interno, fomenta produtividade, competitividade, estabilidade psicológica.
- **Deficiência** (atrasa na entrega, avaria, reprocessamento).

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

6 / 48

1. Qualidade e CQ: o que são.

- **Conformidade com especificações** É típica nos processos de fabrico:
 - Conformidade com normas;
 - Conformidade com procedimentos de acção.
- **Definições de «Qualidade»**
 - **European Organisation for Quality:** totalidade dos aspectos e características dum produto ou serviço que lhe conferem aptidão **para satisfazer uma dada necessidade.**
 - **ISO 8402:** ... (idem) **para satisfazer necessidades expressas ou implícitas** ("to satisfy stated or implied needs").

*Organisation ? Organization ?

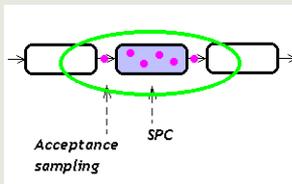
1. Qualidade e CQ: o que são.



- **Qualidade**
 - Agradar a todos !

1. Qualidade e CQ: o que são.

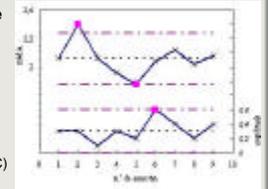
- **Contrôle de Qualidade**
 - A Qualidade tem de ser vigiada, medida: **controlada.**



- **AS, "Acceptance Sampling":** controle de aceitação ou de recepção.
- **SPC, "Statistical Process Control":** controle durante o (ou do) processo.
Mais geralmente...

1. Qualidade e CQ: o que são.

- **As 7 ferramentas da Qualidade**
 1. Gráficos
 2. Folhas de registo
 3. Diagramas de Pareto
 4. Diagramas causa-efeito
 5. Gráficos de dispersão
 6. Histogramas
 7. **Cartas de controle (de Shewhart)** [She1931] (SPC)



- **O AS, "Acceptance Sampling":** controle de aceitação ou de recepção
 - Perdeu importância face ao SPC.
 - Mantém importância (nas fronteiras do sistema).

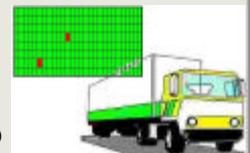
O método de Monte Carlo na prática do Contrôle de Qualidade

1. Qualidade e CQ: o que são.
2. **Contrôle de aceitação**
3. Variável gaussiana
4. Duas variáveis simples
5. Expectativas

2. Contrôle de aceitação

- **Contrôle de aceitação**
- **Lote** de material
- **Amostra** do lote
- **Indicador** da qualidade
- Indicador $\bar{U} \cdot \bar{P}$ Padrão
- Aceitar ou Rejeitar

- **Exemplo base**
- Avaliação de
 - Lote de N itens
 - Com qualidade esperada de **AQL** ("acceptable quality level")



2. Contrôles de aceitação

• Aceitação, exemplo base

$N = 500$ ▪ $U = 10$ g ▪ $AQL = 1,5\%$

Contrôle por atributos	Contrôle por variáveis
$n = 50$	$n = 25$
$Ac = 1$ ($Re = 2$)	$k = 1,72$
Amostra, x (atributos)	Amostra, x (variáveis)
Não-conformes, d (acima de U)	Índice de Q , $Q = \frac{U - \bar{x}}{s}$
$d \leq Ac \Rightarrow$ Aceitar (senão, Rej.)	$Q \geq k \Rightarrow$ Aceitar (senão, Rej.)
Teoria e cálculos: fáceis	Teoria e cálculos: difíceis

19-Maio-2004

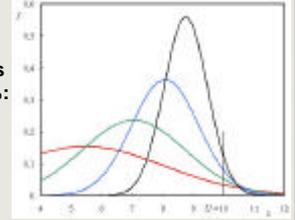
O método de Monte Carlo no CQ

13 / 48

2. Contrôles de aceitação

- Que quer o **cliente**? *Baixa fracção «defeituosa» (não-conforme), i. é, abaixo dum certo valor (AQL).*
- Que quer o **produtor**? O mesmo.

- $U = 10$ g
- Várias curvas de Gauss com idêntico $AQL = 4\%$:



(Na figura, $AQL > 1,5\%$ para melhor visibilidade.)

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

14 / 48

O método de Monte Carlo na prática do Contrôles de Qualidade

1. Qualidade e CQ: o que são.
2. Contrôles de aceitação
3. **Variável gaussiana**
4. Duas variáveis simples
5. Expectativas

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

15 / 48

3. Variável gaussiana

- ■ O índice de qualidade, Q , é intuitivo.
- ■ Q é uma variável aleatória ($-\infty < Q < +\infty$).
- ■ Como se comporta?

$$Q = \frac{U - \bar{x}}{s} \rightarrow Q \geq k$$

\bar{x} , média; s , desvio-padrão; U , limite (superior) de especificação; k , constante de aceitação (tabelada)

- Ou seja:
- Qual é o *mínimo* «tolerável» de Q ?
- Esse valor crítico é $Q_{crit} \equiv k$, a *constante de aceitação*.
- Está tabelado... Mas como foi calculado?

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

16 / 48

3. Variável gaussiana

- Constantes de aceitação, k

ANSI/ASQC Z1.9-1980

TABLE B-1

Master Table for Normal and Tightened Inspection Plans Based on Variability Unknown (Single Specification Limit—Form I)

Sample size code letter	Sample size	Acceptable Quality Levels (normal inspection)																		
		.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	.55									
B	3																			
C	4																			
D	5																			
E	7																			
F	10																			
G	15	2.55	2.42	2.32	2.26	2.06	1.81	1.70	1.65	1.47	1.38	1.30	1.22	1.14	1.06	1.00	0.94	0.88	0.82	0.76
H	20	2.38	2.17	2.06	2.01	1.81	1.56	1.45	1.40	1.22	1.13	1.05	0.97	0.89	0.82	0.76	0.70	0.64	0.58	0.52
I	25	2.11	1.90	1.79	1.74	1.54	1.29	1.18	1.13	0.95	0.86	0.78	0.70	0.62	0.56	0.50	0.44	0.38	0.32	0.26
J	35	1.85	1.64	1.53	1.48	1.28	1.03	0.92	0.87	0.69	0.60	0.52	0.44	0.36	0.30	0.24	0.18	0.12	0.06	0.00

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

17 / 48

3. Variável gaussiana

- Q em variáveis gaussianas

- Se a variável (individual), x , é **gaussiana**,
- A média da amostra, \bar{x} , é *gaussiana*;
- O desvio-padrão, s (ao quadrado), é *chi-quadrado*;
- E Q , o que é?
- Q (vezes \sqrt{n}) é *t não-central* (!).

$$P(T \leq t; \nu; \delta) = C_\nu \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t/\sqrt{1+u^2/\nu}} e^{-x^2/2} dx \right) u^{\nu-1} e^{-u^2/2} du, \quad \nu > 0$$

$$C_\nu = \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) 2^{(\nu-2)/2}}, \quad \alpha = \frac{t}{\sqrt{\nu}}$$

- Será? E nós, chegaríamos lá?!

19-Maio-2004

O método de Monte Carlo no CQ

18 / 48

3. Variável gaussiana (Monte Carlo)

- Entra
- **O Método de Monte Carlo**
- Número aleatório, NA: 0000–9999
- Número aleatório ($/10^4$), u : 0–1
- Densidade de probabilidade, $f(x)$, distribuição (acumul.), $F(x)$
- Dum NA uniforme, u , **se u for uma probabilidade acumulada** (Ulam, 1946), então

$$x_{\text{aleat}} = F^{-1}(u_{\text{aleat}})$$



Stanislaw M. ULAM
1909 (PL) – 1984 (US)

3. Variável gaussiana (Monte Carlo)

Credit for inventing the Monte Carlo method often goes to **Stanislaw Ulam**, a Polish born mathematician who worked for John von Neumann on the United States' **Manhattan Project** during **World War II**. Ulam is primarily known for designing the **hydrogen bomb** with Edward Teller in 1951. **He invented the Monte Carlo method in 1946** while pondering the probabilities of winning a card game of solitaire. Ulam describes the incident as [Eck1987]:

The first thoughts and attempts I made to practice [the Monte Carlo Method] were suggested by a question which occurred to me in 1946 as I was convalescing from an illness and **playing solitaires**. The question was what are the chances that a Canfield solitaire laid out with 52 cards will come out successfully?

3. Variável gaussiana (Monte Carlo)

After spending a lot of time trying to estimate those chances by pure combinatorial calculations, I wondered whether a **more practical method** than “**abstract thinking**” might not be to lay it out say one hundred times and simply observe and count the number of successful plays.

This was already possible to envisage with the beginning of the new **era of fast computers**, and I immediately thought of problems of neutron diffusion and other questions of mathematical physics, and more generally how to change processes described by certain differential equations into an equivalent form interpretable as a succession of random operations. Later ... [in 1946, I] described the idea to John von Neumann, and we began to plan actual calculations.

3. Variável gaussiana (Monte Carlo)

- Como fabricar números aleatórios ?
- Há muitos métodos.

- a) **RANDU**
- b) Eis outro (mau) método, “mid-square”.
- E começando em 2002 ?...

n	n^2	2 algarism.	4 algarism.	2 algarism.
1999	03996001	03	9960	01
9960	99201600	99	2016	00
2016	04064256	04	0642	56
0642	00412164	00	4121	64
4121	16982641	16	9826	41
9826	96550276	96	5502	76
5502	30272004	30	2720	04
2720	07398400	07	3984	00
3984	15872256	15	8722	56
8722	76073284	76	0732	84

3. Variável gaussiana

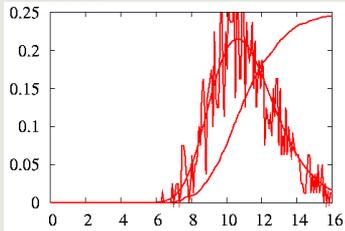
- É $Q \geq k$. Mas como calcular esta **constante** ?
 - Em vez do «pensamento abstracto» (Ulam), usemos a **simulação** através do método de Monte Carlo.
 - Era: $n = 25$, $U = 10$ g, $AQL = 1,5\%$.
 - Qualquer variável de Gauss tal que $F(U; m, s) = 1 - AQL$ nos servirá para a simulação.
 - A mais cómoda é a «reduzida» ($m = 0$, $s = 1$).
 - O novo U será $U = (U - m) / s$.
- $$\Phi\left(\frac{U - m}{s}\right) = 1 - AQL \quad U' = \Phi^{-1}(1 - AQL) = \Phi^{-1}(1 - 0,015) = 2,17$$
- A nossa variável terá, pois, $m = 0$, $s = 1$, com $U = 2,17$.

3. Variável gaussiana

- Tal como Ulam, vamos fazer muitos ensaios.
- Não apenas uns 100. Talvez 1 000.
- Faremos um histograma de Q , índice de qualidade para amostras com
- $n = 25$ valores «experimentais»
- da variável gaussiana referida.
- Assim:
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{24}, x_{25})$, com $x_i = \Phi^{-1}(u_{\text{aleat}})$
- \bar{x} = média(\mathbf{x}); s = Desvio Padrão(\mathbf{x}). **Excel:** RAND(), NORMSINV, AVERAGE, STDEV
- Donde, $Q = \frac{U - \bar{x}}{s}$ Convirá usar $t = Q\sqrt{n} = 5 Q$.
- Calculamos 1 000 «fs»... que representaremos em histograma.

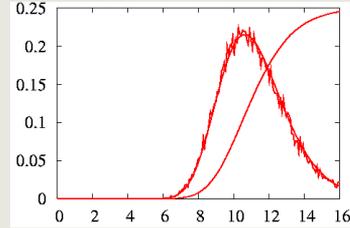
3. Variável gaussiana

- Simulação de $t (n = 25)$
 - (I) 1 000 amostras



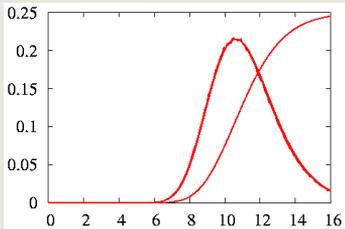
3. Variável gaussiana

- Simulação de $t (n = 25)$
 - (II) 30 000 amostras



3. Variável gaussiana

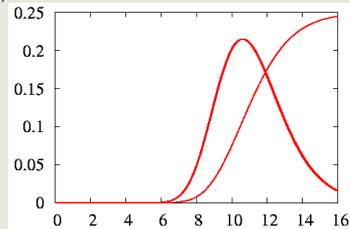
- Simulação de $t (n = 25)$
 - (III) 1 000 000 amostras



- ... que é a curva t não-central **teórica !**

3. Variável gaussiana

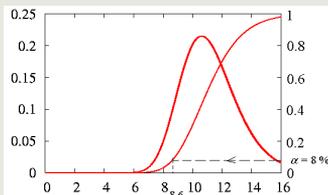
- Simulação de $t (n = 25)$
 - (IV) 100 000 000 amostras



- ... que é a curva t não-central **teórica !**

3. Variável gaussiana

- E o valor da constante de aceitação, k , para $n = 25$?
- Da curva **simulada** (ou da **teórica**...), com $\alpha = 8\%$, vem:
 - $t_{crit} = 8,6$
 - $t = Q \sqrt{n} = 5 Q$
 - $k \equiv Q_{crit} = t_{crit} / \sqrt{n} = 8,6 / 5 = 1,72$



- que **confirma** o valor dado na norma ANSI/ASQC Z1.9-1980.

3. Variável gaussiana

- **Cálculos**
- Programados em *Fortran 90*
- Com a Biblioteca **NAG** de cálculo científico (ou a **IMSL**)
 - para cálculos de funções de probabilidade (confirmativos), etc..
- Plataforma: Unix.
- Gráficos: "gnuplot".
- Compatível com Internet.

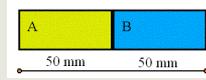


O método de Monte Carlo na prática do Contrôlo de Qualidade

1. Qualidade e CQ: o que são.
2. Contrôlo de aceitação
3. Variável gaussiana
- 4. Duas variáveis simples**
5. Expectativas

4. Duas variáveis simples

- A **soma** será simples ?...
- Duas barras justapostas, A e B, com $L = 50 \pm 1$ mm ...
- ...para obter uma peça, C:

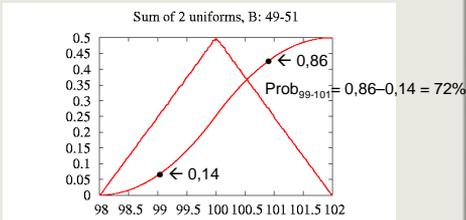


- Pretendemos C ($c = a + b$) com 100 ± 1 mm. Qual a probabilidade ?
- Distribuições simples: **uniformes**

$$f_A(x) = \frac{1}{a_{\max} - a_{\min}} \quad f_B(x) = \frac{1}{b_{\max} - b_{\min}}$$

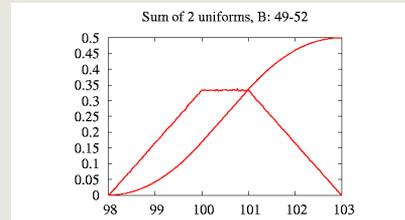
4. Duas variáveis simples

- Simulação do comprimento c (será: $\frac{1}{2}$ milhão de peças)
- A: 49-51 B: 49-51 $\rightarrow \bullet \leftarrow$ $\rightarrow \bullet \leftarrow$



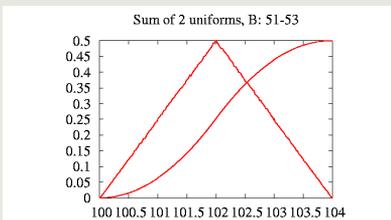
4. Duas variáveis simples

- Simulação do comprimento c
- A: 49-51 B: 49-52 $\rightarrow \bullet \leftarrow$ $\rightarrow \bullet \leftarrow$



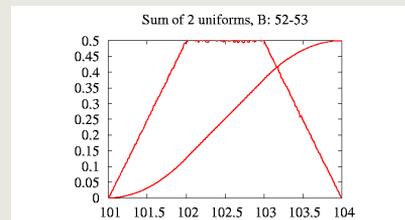
4. Duas variáveis simples

- Simulação do comprimento c
- A: 49-51 B: 51-53 $\rightarrow \bullet \leftarrow$ $\rightarrow \bullet \leftarrow$



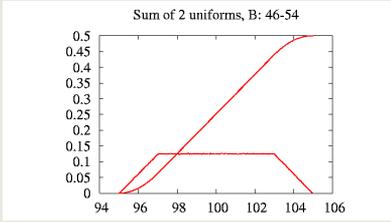
4. Duas variáveis simples

- Simulação do comprimento c
- A: 49-51 B: 52-53 $\rightarrow \bullet \leftarrow$ $\rightarrow \bullet \leftarrow$



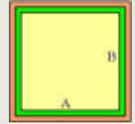
4. Duas variáveis simples

- Simulação do comprimento c
- A: 49–51 B: 46–54 $\text{---} \bullet \text{---}$ $\text{---} \bullet \bullet \text{---}$



4. Duas variáveis simples

- O **produto** será simples ?...
- Duas dimensões, lados A e B, com $L = 3\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \text{ cm}$...
- ...para obter um tubo «quadrado», C, com uma certa secção...

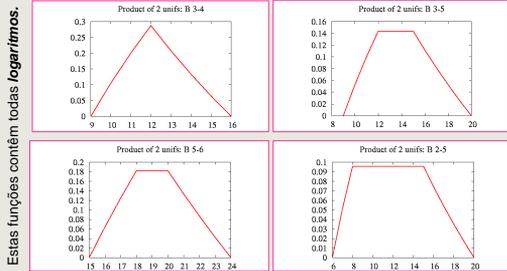


- Pretendemos C ($c = a b$) com $12\frac{1}{4} \pm \epsilon \text{ cm}^2$. Qual a probabilidade ?
- Distribuições simples (idem): **uniformes**

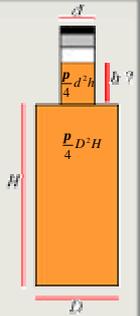
$$f_A(x) = \frac{1}{a_{\max} - a_{\min}} \quad f_B(x) = \frac{1}{b_{\max} - b_{\min}}$$

4. Duas variáveis simples

- Cálculo (não simulação) da área c [Gle2002]



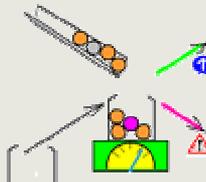
4. Duas variáveis simples



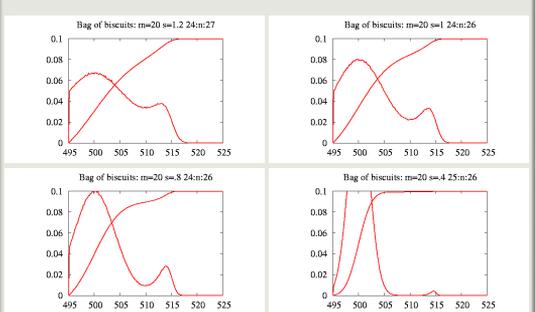
- Três variáveis ?... Quatro variáveis ?...
- Encher uma garrafa com um certo volume ...
- ...e tentar obter um nível h (no gargalo) conveniente
- Ora,
$$h(H, D, d, V) = \frac{4}{p} \frac{V}{d^2} - \left(\frac{D}{d}\right)^2 H$$
- H, D, d , e V : cada um com a sua distribuição ! Qual a probabilidade de ser $h_{\min} < h < h_{\max}$?
- (Etc.)

4. Duas variáveis simples

- Duas variáveis. Simples ?... Dependentes !...
- Encher sacos com $W = \frac{1}{2} \text{ kg}$ (495–510 g) de bolos.
 - Massa de cada bolo, w : gaussiana, $m = 20 \text{ g}$, $s = \dots \text{ g}$.
 - N.º de bolos conveniente, $(\frac{1}{2} \text{ kg}) / (20 \text{ g}) = 25$. Ou não ?
- Qual a probabilidade de ser $L \leq W \leq U$?
- Quais serão as frações rejeitadas ?



4. Duas variáveis simples

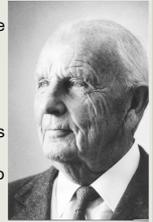


O método de Monte Carlo na prática do Contrôlo de Qualidade

1. Qualidade e CQ: o que são.
2. Contrôlo de aceitação
3. Variável gaussiana
4. Duas variáveis simples
5. **Expectativas**

5. Expectativas

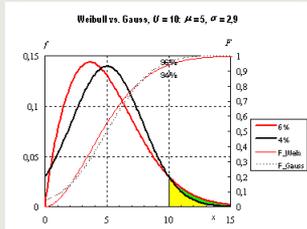
- Variáveis assimétricas
 - São de interesse em Mecânica
 - Não há rugosidade negativa na superfície duma peça lisa.
 - São de interesse em Química [Lev1997]
 - Não há concentração negativa duma impureza.
 - Assumindo «tudo» gaussiano, os utilizadores enganam-se.
- Será possível deduzir-se um critério de aceitação similar (elegante), $Q = k$?
- Ilustração com distribuição de Weibull.



E. H. Wallodi WEIBULL
1887 – 1979

5. Expectativas

- Possível comportamento duma impureza
 - Falácia da gaussianidade: AQL = 4 % afinal é 6 % (exemplo).



Em resumo

Assim, o

Método de Monte Carlo

- **Resolve problemas de complexidade quase arbitrária (“when everything else fails...”).**
- **É geral, servindo as mais diversas aplicações.**
- **Tira partido do computador e atrai para o seu uso.**
- **Tem interesse didático (pela sua aplicabilidade) e pedagógico (pela sua perspectiva).**
- **Merece divulgação maior do que a que tem recebido.**
- **Ajuda a «evitar» — e a desmistificar — a Estatística.**

Reconhecimento

- Centro de Processos Químicos do IST
- Centro de Informática do IST
- Serv. Municipalizados de Águas e Saneamento de Oeiras e Amadora, Lab. (Oeiras)
- Prof. João A. Branco (DMatem., IST)
- Santos Barosa, SA (Marinha Grande)
- Escola Superior de Tecnologia e Gestão (IPP)

Bibliografia

- **Casquilho, M.**, 1998, “Analysis of the Factors for the Range Control Chart”, 8th. World Congress on Total Quality, Mumbai (ex-Bombay), India, 12-14 Feb., pp 425-439.
- **Eckhart, Roger**, 1987, “Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method”, Los Alamos Science, special issue.
- **Glen, A. G., L. M. Leemis, J. H. Drew**, 2002*, “Computing the distribution of the product of two continuous variables”, *Computational Statistics & Data Analysis*, in press (Nov 03).
- **Juran, J. M., F. M. Gryna** (eds.), 1988, “Juran’s Quality Control Handbook”, 4.th ed., McGraw-Hill, New York, NY, USA.
- **Levinson, W.**, 1997, “Watch Out for Nonnormal Distributions of Impurities”, *Chemical Engineering Progress*, May, pp 70-76.
- **Shewhart, Walter A.**, 1931, “Economic Control of Quality of Manufactured Product”, D. Van Nostrand, New York, NY, USA.