

Trigonometria Racional aplicada à Robótica

João Pequito Almeida

21 de Novembro de 2006

Conteúdo

1	Introdução	3
1.1	Resumo	3
1.2	Trigonometria Racional	3
1.3	Notação e Operadores	3
2	Motivação	5
2.1	Porquê Trigonometria Racional	5
2.2	Principais Vantagens	5
3	Cinemática	7
3.1	Princípios Base	7
3.1.1	Conversão de Referenciais	8
3.1.2	Conversão de Grandezas	10
3.1.3	Conversão Polar	10
3.2	Solução de Juntas	11
3.3	Permuta de Soluções	12
3.3.1	Exemplo de aplicação das soluções permutadas	13
3.4	Solução da Estrutura do Braço	15
3.5	Aplicação ao Manipulador Série	15
3.6	Forma compacta	16
4	Perspectivas	17
A	Deduções	18
A.1	Operadores	18
A.1.1	Soma de quadrâncias	18
A.1.2	Soma de aberturas	18
A.2	Fórmulas	18

A.2.1	Matrizes de escolha de linhas e de Referencial	18
A.2.2	Conversão Polar	21
B	Exemplos de Aplicação	23
B.1	Robot tipo cobra (<i>hiper-redundante</i>)	23
B.2	Manipulador paralelo	24

1 Introdução

1.1 Resumo

Neste trabalho estudar-se-á a cinemática de robots usando conceitos de *Trigonometria Racional* [Wildberger].

1.2 Trigonometria Racional

Sempre que o termo *Trigonometria Racional* (TR) for usado, este referir-se-á à formalização trigonométrica enunciada em [Wildberger]. Desta trigonometria usar-se-ão os seguintes conceitos:

- Spread ou *Abertura*
- Quadrance ou *Quadrância*

De uma forma simplificada, podemos definir a *Abertura* como o *seno quadrado de um ângulo genérico θ* e a *Quadrância* como o *quadrado da distância entre dois pontos ordenados*. Neste trabalho considerar-se-á sempre o caso em que a *Quadrância* é positiva com origem numa coordenada positiva e nesse caso a solução para a sua raiz quadrada é única (solução positiva).

Existem outras definições para estas grandezas, discutidas em profundidade em [Wildberger], que não serão do âmbito deste estudo.

1.3 Notação e Operadores

A seguinte notação será usada:

- s_α designa uma abertura α
- q_x designa uma quadrância x
- I_n - matriz identidade $n \times n$
- $S(\alpha)$ designa a conversão de um ângulo α numa abertura s_α
- $S^{-1}(s_\alpha)$ designa a conversão de uma abertura s_α num ângulo α

Os seguintes operadores auxiliares serão usados:

- Soma de quadrâncias

$$\begin{aligned} A \boxplus B &= \left(\sqrt{A} + \sqrt{B} \right)^2 \\ A \boxminus B &= \left(\sqrt{A} - \sqrt{B} \right)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

- Soma de aberturas

$$\begin{aligned} s_a \oplus s_b &= \left(\sqrt{s_a(1-s_b)} + \sqrt{s_b(1-s_a)} \right)^2 \\ s_a \ominus s_b &= \left(\sqrt{s_a(1-s_b)} - \sqrt{s_b(1-s_a)} \right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

- Produto de Kronecker $A \otimes B$
- Produto Cartesiano $A \times B$
- Soma directa $A \oplus B$
- $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$, gera a matriz $n \times n$ com A_i na diagonal principal
- $\text{ones}(m, n)$, gera uma matriz $m \times n$ de uns

As demonstrações para as equações 1 e 2 estão em anexo.

2 Motivação

2.1 Porquê Trigonometria Racional

A *Trigonometria Racional* (TR) é uma formulação orientada para a solução de problemas poligonais. De facto, um dos motes é a ideia de resolver triângulos sem nunca usar funções circulares e ângulos. A TR fornece então ferramentas para abordar problemas geométricos triangulares e poligonais que facilitam, na maior parte dos casos, o problema.

Um dos conceitos fundamentais para este trabalho é o de abertura, que define a separação de rectas sem ambiguidade de quadrante e independente de convenções. A quadrância revelou-se útil em problemas de projecção em que o Teorema de Pitágoras fica simplificado.

Graças a estas simplificações é então claro que num problema complexo envolvendo geometria, estas ferramentas facilitam a solução alguns problemas. Neste trabalho mostrar-se-á esta facilidade em casos em que outros modelos geométricos tornam os modelos complicados e pesados computacionalmente.

2.2 Principais Vantagens

O facto de não se utilizarem explicitamente fórmulas circulares ou números transcendentais torna esta trigonometria especialmente apelativa em termos computacionais, já que as aberturas são expressas em termos de quocientes em vez de funções cuja computação é mais complicada (como o seno por exemplo). O uso da TR neste trabalho permitiu:

- criar um modelo em que a escolha dos referenciais de trabalho se torna um problema semântico, não afectando os resultados finais;
- definir o modelo em termos de somas em vez de multiplicação de matrizes, o que expõe claramente a estrutura do robot (e a consequente inversão do modelo);
- aproveitar as redundâncias naturais de um referencial com simetrias (usando uma representação em \mathcal{R}_0^+ e matrizes de expansão);
- separar efectivamente os problemas relativos a juntas dos problemas relativos a configurações de juntas e a semântica associada a cada um;
- obter a relação entre o *espaço de junta* e o espaço de trabalho expressas como termos de equações algébricas claras;

- fazer a conversão entre coordenadas cartesianas e polares através de quocientes simples;
- fazer a otimização global do modelo inverso.

3 Cinemática

3.1 Princípios Base

A ideia fundamental deste modelo assenta na ambiguidade natural que as aberturas criam ao serem usadas. Por exemplo, quando dizemos que um ponto num referencial cartesiano a duas dimensões tem um raio R com abertura s , este ponto pode estar em 4 quadrantes. Como existe esta ambiguidade natural, explora-se este facto como uma vantagem.

Todo o modelo é construído com ambiguidade à partida, ambiguidade essa que é resolvida juntando informação ao modelo (no caso do exemplo, juntando o número do quadrante). Com essa informação adicional passamos a ter um endereçamento de soluções em vez de usarmos funções que dêem soluções para todas essas soluções. É esta ambiguidade que permite uma soma simples e uma inversão explícita. Fica então um problema extra dado por este endereçamento de soluções. Num exemplo muito explícito, tome-se um ponto com coordenadas $(\sqrt{q_x}, -\sqrt{q_y}, \sqrt{q_z})$. Pode representar-se este mesmo ponto como o produto das 3 matrizes seguintes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{q_x} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q_y} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q_z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Chame-se então a estas três matrizes, respectivamente, L de escolha de linhas, R de referencial e B de base. Podemos então dizer que este ponto P é dado pela equação 4.

$$P = L \times R \times B \quad (4)$$

O endereçamento descrito acima é feito desta forma, usando a matriz L como a portadora da semântica associada à localização do ponto no referencial.

Uma consequência imediata deste facto é que se a matriz de referencial for diferente, existe uma matriz de conversão que torna as soluções iguais. De facto, se apenas trocarmos os sinais de cada eixo, apenas é necessário trocar a referência das linhas que as soluções são equivalentes.

3.1.1 Conversão de Referenciais

É possível, como foi dado no exemplo anterior, encontrar então matrizes de referencial partindo das convenções normalmente usadas para o sinal dos pontos. Assim, para o Referencial Cartesiano tridimensional por exemplo temos a matriz já usada acima:

$$R_{\text{Cartesiano}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

É necessário também representar desta forma as aberturas, de forma a possibilitar a representação de orientações para além de posições. Assim, usando a convenção α, β, γ (ângulos de Euler num Referencial Cartesiano) temos então a seguinte matriz de referencial (ângulos em voltas):

$$R_{\text{Euler}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Esta matriz tem uma forma já menos clara e que depende da escolha da convenção dos ângulos por octante, que se torna mais explícita quando usada num contexto semelhante ao anterior:

$$[\alpha \ \beta \ \gamma] = L \times R_{\text{Euler}} \times \begin{bmatrix} S^{-1}(s_\alpha) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & S^{-1}(s_\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S^{-1}(s_\gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Note-se que aqui as aberturas são convertidas de novo em ângulos, já que o valor da abertura em qualquer um dos casos se manterá igual em todos

os octantes. Esta reconversão é necessária já que as aberturas são iguais em qualquer octante e não precisam de ser expandidas.

Após se demonstrar a presença destas estruturas nas coordenadas, põe-se então a questão de fazer variar a matriz L , por exemplo adicionando-lhe linhas. Aí, o que sucederá será que haverá, consoante a matriz escolhida, reflexões (distorcidas ou não) da grandeza original. De facto, ao fazermos variar a base de valores, podemos expandi-la simultaneamente para os oito octantes de um Referencial Cartesiano por exemplo, o que reduz em muito a computação necessária. Basta saber o ponto num octante que todos os outros são obtidos por reflexões. Este facto é essencial para os passos seguintes e aqui surge a primeira vantagem computacional: apenas é preciso guardar a grandeza, o sinal é separado semanticamente do problema.

Assim, por exemplo, para o caso de todas as simetrias de um ponto num Referencial Cartesiano temos

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} = L \times R_{Cartesiano} \times \begin{bmatrix} \sqrt{q_x} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q_y} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q_z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Com $L = I_8$, identicamente para a rotação

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \\ \alpha_7 & \beta_7 & \gamma_7 \\ \alpha_8 & \beta_8 & \gamma_8 \end{bmatrix} = L \times R_{Euler} \times \begin{bmatrix} S^{-1}(s_\alpha) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & S^{-1}(s_\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S^{-1}(s_\gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Com $L = I_8$.

Percebe-se agora que nestes exemplos um movimento descrito num octante gera imediatamente os outros 7 por reflexão, sendo assim apenas necessário descrevê-lo num octante e escolher a(s) reflexão(ões). A visualização é fácil, imagine-se que se fechou o ponto numa sala espelhada. Podemos gerar os pontos do outro lado do espelho através da expansão descrita.

No caso do ponto se mover, todos os reflexos irão segui-lo de acordo com a expansão, sendo apenas necessário descrever a posição num destes reflexos e endereçá-lo directamente com a matriz L .

3.1.2 Conversão de Grandezas

Para converter coordenadas em quadrâncias é apenas necessário obter o quadrado do módulo da coordenada. Em seguida, colocando em evidência os sinais torna-se clara a linha correspondente do referencial usado e é possível colocar o ponto na forma descrita em 4. Para outras grandezas como o comprimento de uma junta o processo é idêntico.

3.1.3 Conversão Polar

Uma das grandes vantagens desta representação é a conversão entre coordenadas em quadrâncias e as suas equivalentes polares a três dimensões:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ s_\alpha \\ s_\beta \\ s_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\theta s_\varphi R \\ (1 - s_\theta) s_\varphi R \\ (1 - s_\varphi) R \\ (1 - s_\theta) \\ \frac{1}{1 + s_\theta \frac{s_\varphi}{1 - s_\varphi}} \\ \frac{1}{1 + (1 - s_\theta) \frac{s_\varphi}{1 - s_\varphi}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Em que θ e φ são os usados na convenção de [Wildberger], R é o raio da junta, e s_α , s_β e s_γ são as aberturas equivalentes dos ângulos de Euler. A demonstração de 10 está em anexo. Esta conversão é muito simples já que basta usar as seguintes equações:

- $s_\theta = \frac{q_x}{q_x + q_y}$
- $s_\varphi = \frac{q_x + q_y}{q_x + q_y + q_z}$
- $R = q_x + q_y + q_z$

Problema de Ajuste da Junta Surge então um problema nesta conversão: o que fazer quando o raio da junta é definido à partida (que é o caso mais comum). Neste caso, temos menos um parâmetro de ajuste, o que obriga a fazer uma escolha. Imagine-se que se pretende que um braço de comprimento 4 atinja o ponto (4, 4), isto é claramente impossível, no entanto, que decisão tomar na escolha da abertura? O braço pode, por exemplo, minimizar o erro na primeira coordenada, nesse caso, o ponto que atingiria seria

(4, 0), tendo erro 0 segundo a primeira coordenada mas erro 4 segundo a segunda coordenada. Identicamente, o raciocínio pode ser feito para vários critérios de ajuste. Assim, faz sentido formular um problema de otimização em que estes critérios de otimização possam ser escolhidos. Este pode ser descrito como:

Encontrar s_θ , s_φ e R tal que o erro entre a posição do ponto actuador da junta e o ponto alvo seja mínimo

Dado que há erros em orientação e erros em posição, estes devem ser considerados independentemente. Também é útil que se defina o erro com base num critério de *preferência de coordenadas* (fazer com que a junta minimize mais o erro segundo um eixo, por exemplo). Este problema de otimização é equivalente à projecção de um ponto numa esfera, esfera essa que é a área coberta pelo ponto actuador da junta. Esta projecção, sendo parametrizada, permite no final da concatenação das juntas obter o erro total em posição e orientação. A abordagem foi a seguinte:

Encontrar s_θ , s_φ , R tais que $\alpha e_p + (1 - \alpha)e_o$ seja mínimo, com $\alpha \in [0, 1]$, em que e_p é o erro de posição, e_o é o erro de orientação e α é o peso pretendido.

Desta formalização resulta imediatamente que os parâmetros óptimos serão dependentes de α , que pesa o quão dependente é o erro total dos erros de posição e orientação.

Para os erros e_p e e_o a definição usada foi a seguinte:

$$e_p = w_{p1}(P_x \boxminus R_x) + w_{p2}(P_y \boxminus R_y) + w_{p3}(P_z \boxminus R_z) = w_p^T(P \boxminus R)$$

$$e_o = w_{o1}(s_{p\alpha} \ominus s_\alpha) + w_{o2}(s_{p\beta} \ominus s_\beta) + w_{o3}(s_{p\gamma} \ominus s_\gamma) = w_o^T(S_p \ominus S)$$

Com P a quadrância polar do ponto alvo e S_p a abertura em ângulos de Euler do ponto alvo. Os pesos w permitem uma otimização pesada em termos de cada um dos elementos para que a junta possa, por exemplo, minimizar mais x que y e z .

Este problema ainda não está resolvido.

3.2 Solução de Juntas

A solução de juntas é feita usando os princípios descritos acima, considerando a junta um vector cujo ponto terminal é dado pelos valores acima descritos. Supõe-se, na conversão de coordenadas, que existe sempre raio para que se definam aberturas. Há a possibilidade de definir "juntas sem raio" (ou seja, juntas em que apenas varia a orientação), mas por problemas de definição destas aberturas na TR é necessário recorrer à função sen^2 .

Chame-se então P_i à posição terminal de uma junta i . Esta será dada por:

$$P_i = L_i \times R_i \times B_i \tag{11}$$

em que L_i é a matriz de endereçamento da junta i , R_i a matriz de referencial e B_i a base de valores da junta.

3.3 Permuta de Soluções

No caso de haver múltiplas soluções por cada junta, ou seja, estarmos no caso em que queremos abordar todas as reflexões simultaneamente, torna-se necessário combinar cada reflexão de uma junta com todas as outras. Se considerarmos cada solução de uma junta (cada linha de P_i , dada por $M_j \times P_i$) como um membro de um conjunto \mathcal{S}_i , o conjunto das soluções para a junta i , esta permuta será o Produto Cartesiano (\times) de todos os conjuntos \mathcal{S}_i para todas as juntas:

$$\mathcal{T} = \times_{i=1}^n \mathcal{S}_i \quad (12)$$

Os tuplos \mathcal{T} serão combinações únicas de linhas das matrizes de posição. A relação entre estes elementos será depois dada pela estrutura do braço. Em termos de operações matriciais estes conjuntos podem ser obtidos através do seguinte conjunto de equações (com k coordenadas por ponto):

$$M_j = [\delta_{1j} \delta_{2j} \dots \delta_{rank(L_i),j}], \quad \delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j, \quad 0 \text{ c.c.}$$

$$Sol(a, b) = \prod_{i=a}^b rank(L_i);$$

$$I = Sol(1, i - 1); \quad O = Sol(i + 1, n); \quad (13)$$

$$P_i^* = \left(\sum_{j=1}^{rank(L_i)} (M_j \times P_i \otimes ones(I, 1) \otimes M_j^T) \right) \otimes ones(O, 1)$$

Note-se que, neste caso, $M_j \times P_i$ é a solução j da junta i e $rank(L_i)$ o total de soluções da junta i , I é o total de soluções das juntas anteriores a i , O é o total de soluções das juntas posteriores a i . A dimensão da matriz P_i^* é $(Sol(1, n) \times k)$.

Para simplificação, chame-se então *perm* à função gera as permutações, temos então:

$$P_i^* = perm(P_i) \quad (14)$$

P_i^* é uma matriz com as linhas repetidas de forma a que, quando se operar entre os vários elementos P_i estes se combinem em conjuntos únicos

de pontos. Se se trocar a ordem dos elementos P_i neste cálculo os resultados em P_i^* serão diferentes mas os resultados finais serão idênticos, mais uma vez à parte do endereçamento. Apesar da complexidade aparente toda a informação gerada por esta função é redundante à parte do endereçamento.

3.3.1 Exemplo de aplicação das soluções permutadas

Para melhor ilustrar o processo de permutação acima descrito imagine-se, por exemplo, o caso:

Obter a posição do actuador final a duas dimensões de três juntas com duas soluções cada

Aberturas das juntas: $s_{\theta_1} = \frac{1}{2}$, $s_{\theta_2} = \frac{1}{4}$, $s_{\theta_3} = \frac{3}{4}$

Comprimento das juntas: $Q_1 = 1$, $Q_2 = 4$, $Q_3 = 9$

Referenciais das juntas: $R_1 = R_2 = R_3 = R_{Cartesiano2D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Matrizes de escolha de linhas:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (1º e 2º quadrantes),}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (1º e 4º quadrantes),}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (2º e 3º quadrantes)}$$

Resolução Sabendo que $[x \ y] = [\sqrt{s_\theta Q} \ \sqrt{(1-s_\theta)Q}]$, as bases das juntas B_i são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{27}{4}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{9}{4}} \end{bmatrix}$$

As matrizes de posição $P_i = L_i \times R_i \times B_i$ são:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{3} \\ \sqrt{1} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{27}{4}} & \sqrt{\frac{9}{4}} \\ -\sqrt{\frac{27}{4}} & -\sqrt{\frac{9}{4}} \end{bmatrix}$$

E as soluções permutadas são:

$$P_i^* = perm(P_i)$$

$$P_1^* = perm(P_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad P_2^* = perm(P_2) = \begin{bmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{3} \\ \sqrt{1} & \sqrt{3} \\ \sqrt{1} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{1} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{1} & \sqrt{3} \\ \sqrt{1} & \sqrt{3} \\ \sqrt{1} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{1} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P_3^* = perm(P_3) = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{27}{4}} & \sqrt{\frac{9}{4}} \\ -\sqrt{\frac{27}{4}} & \sqrt{\frac{9}{4}} \\ -\sqrt{\frac{27}{4}} & \sqrt{\frac{9}{4}} \\ -\sqrt{\frac{27}{4}} & \sqrt{\frac{9}{4}} \\ -\sqrt{\frac{27}{4}} & -\sqrt{\frac{9}{4}} \\ -\sqrt{\frac{27}{4}} & -\sqrt{\frac{9}{4}} \\ -\sqrt{\frac{27}{4}} & -\sqrt{\frac{9}{4}} \\ -\sqrt{\frac{27}{4}} & -\sqrt{\frac{9}{4}} \end{bmatrix}$$

As posições finais são:

$$P_f = P_1^* + P_2^* + P_3^* \approx \begin{bmatrix} -0.89097 & 3.93916 \\ -2.3052 & 3.9392 \\ -0.89097 & 0.47506 \\ -2.30518 & 0.47506 \\ -0.89097 & 0.93916 \\ -2.30518 & 0.93916 \\ -0.89097 & -2.52494 \\ -2.3052 & -2.5249 \end{bmatrix}$$

3.4 Solução da Estrutura do Braço

Dadas as posições permutadas P_i^* podemos então, graças à separação dos sinais e dos referenciais, obter os pontos actuadores através de somas simples. Esta forma permite que a estrutura do robot se torne explícita numa matriz que será referida como a matriz S , de estrutura (*structure*). Demonstrar-se-á que é possível representar quer configurações série quer configurações paralelo com igual complexidade.

3.5 Aplicação ao Manipulador Série

Para o caso de um manipulador série com n juntas, temos então

$$\begin{aligned} P_{f_1} &= P_1^* \\ P_{f_2} &= P_1^* + P_2^* \\ &\dots \\ P_{f_n} &= P_1^* + P_2^* + \dots + P_n^* \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (15)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_{f_1} \\ P_{f_2} \\ \vdots \\ P_{f_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \otimes I_{Sol(1,n)} \times \begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ \vdots \\ P_n^* \end{bmatrix}$$

Em que P_{f_i} são os pontos vistos no referencial de trabalho. O modelo inverso é obtido pela inversão da equação descrita acima. Esta inversão pode não é trivial na maior parte dos casos, já que implica resolver um problema sub-determinado com restrições (tipicamente apenas se quer comandar o ponto actuador, ou seja, apenas se fornece a solução S_{f_n} o que impede a inversão simples e requer critérios de inversão).

Uma das abordagens possíveis a esta inversão sub-determinada é o uso da pseudo-inversa pesada, que permite a optimização global da solução e um

peso controlável sobre como será distribuído o "trabalho". Note-se que na equação acima a matriz C é simples mas tem uma inversa complicada, já que pode dar-se o caso de se querer diferentes otimizações para diferentes coordenadas.

3.6 Forma compacta

Este método pode ser escrito numa forma compacta em 3 equações:

- a equação da junta, $P_i = L_i \times R_i \times B_i$;
- a equação de permutações, $P_i^* = perm(P_i)$;
- a equação de estrutura, $P_f = S \times P_i^*$.

4 Perspectivas

Este modelo permite representar qualquer estrutura de braço e dada a formalização matricial poder-se-á extrair bastante informação. Também permitiu separar claramente os problemas envolvidos quer na cinemática directa quer na inversa. As propriedades dinâmicas ainda estão em estudo.

A Deduções

A.1 Operadores

A.1.1 Soma de quadrâncias

Prova da equação 1 Tome-se duas quadrâncias, A e B , obtidas a partir de distâncias a e b , respectivamente.

A quadrância C dada por c^2 com $c = a + b$ será então $C = (a + b)^2$. Como $a = \pm\sqrt{A}$ e $b = \pm\sqrt{B}$, temos então $C = (\pm\sqrt{A} \pm \sqrt{B})^2$.

No caso em estudo, como há 4 somas possíveis, correspondentes às combinações de sinal, resolve-se a ambiguidade de soluções considerando a e b positivos e então a soma de quadrâncias será:

$$C = A \boxplus B = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 \text{ e } C = A \boxminus B = (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2$$

q.e.d.

A.1.2 Soma de aberturas

Prova da equação 2 Sejam α e β dois ângulos genéricos com aberturas s_α e s_β respectivamente.

A abertura s_γ de um ângulo $\gamma = \alpha + \beta$ é dada por $(\text{sen}(\alpha \pm \beta))^2 = (\text{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \text{sen}(\beta)\cos(\alpha))^2 \rightsquigarrow (\sqrt{\text{sen}^2(\alpha)}\sqrt{\cos^2(\beta)} \pm \sqrt{\text{sen}^2(\beta)}\sqrt{\cos^2(\alpha)})^2 = (\sqrt{s_\alpha(1-s_\beta)} \pm \sqrt{s_\beta(1-s_\alpha)})^2$

$$A \boxplus B = (\sqrt{A(1-B)} + \sqrt{B(1-A)})^2$$

$$A \boxminus B = (\sqrt{A(1-B)} - \sqrt{B(1-A)})^2$$

q.e.d.

Dedução geométrica (sem funções circulares) por completar.

A.2 Fórmulas

A.2.1 Matrizes de escolha de linhas e de Referencial

Prova da equação 4 Dado que, no âmbito deste estudo, a equação $\pm\sqrt{a^2}$ apenas tem uma solução (i.e. é apenas considerada a solução positiva), pode ver-se $\sqrt{a^2}$ como $|a|$ e assim, para qualquer ponto coordenado a num referencial R , este ponto a é o produto de um sinal s_i e do módulo da coordenada $|a|$, ou seja, $a = s_i|a|$.

A matriz de referencial, R , é a matriz que contém todos os sinais possíveis

deste referencial e é dada por $[s_1 s_2 \dots s_n]^T$. Assim podemos escrever a como:

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{i-1} \\ s_i \\ s_{i+1} \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{bmatrix} \times |a|$$

Chame-se então L à matriz de escolha do sinal da coordenada e B à matriz de base, neste caso de uma dimensão ($|a|$). Temos então como equação final $a = L \times R \times B$ para qualquer ponto a num referencial do tipo definido acima q.e.d.

Podemos dizer que, usando esta formalização, a base quantifica a grandeza, o referencial atribui-lhe um sinal e a matriz de escolha de linhas referencia este sinal.

Prova das equações 3 e 5 (matrizes de referencial Cartesiano) Para mais dimensões a prova é idêntica à anterior mas é necessário que a matriz R inclua todas as combinações de sinais dos eixos. Para isso basta fazer o produto cartesiano do conjunto de sinais de cada referencial e obter-se-á o conjunto de sinais final.

Desta conclusão tira-se imediatamente a prova para as equações 3 e 5.

Seja então, para o caso tridimensional, um referencial com três rectas ordenadas com sinais $s_x = \{1, -1\}$, $s_y = \{1, -1\}$, $s_z = \{1, -1\}$ para cada uma das dimensões. A matriz de referencial é dada então por $s_x \times s_y \times s_z$ que pode ser escrita novamente como uma matriz. Note-se que a ordem das linhas é irrelevante para o problema e que dependerá da convenção de numeração de octantes. Mais propriamente, para a convenção Cartesiana, R será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

q.e.d.

Prova da equação 6 (convenção de Euler para a rotação) Para o caso da rotação, o raciocínio anterior complica-se já que não existe nenhuma definição de "módulo de rotação". Graças à trigonometria racional existe, no entanto, uma grandeza cujo significado é semelhante ao do módulo para a translação: a abertura. No caso da abertura, a separação entre segmentos de recta não depende do referencial em que é medido, providenciando uma medida sem ambiguidade de separação entre rectas. Para o caso em que se deseje uma medida em ângulo deste "módulo de rotação", pode fazer-se (ainda que pouco explícito), o cálculo $\alpha = \arcsen(\sqrt{\text{sen}^2(\alpha)})$. Este processo converterá qualquer ângulo α num ângulo entre 0 e $\frac{1}{4}$ de volta (0 e $\frac{\pi}{2}$ em radianos).

Aceite assim esta noção de "módulo de rotação", podemos então definir identicamente ao processo anterior, uma base e uma matriz de referencial. Coloca-se, no entanto, um problema, descrito graficamente na figura 1, é este o de escolher que ângulo é o correspondente a uma dada abertura. Esta escolha é irrelevante no âmbito das soluções mas é importante para a representação correcta da junta, que pode num caso, por exemplo funcionar entre 0 e 1 volta e outra entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ volta.

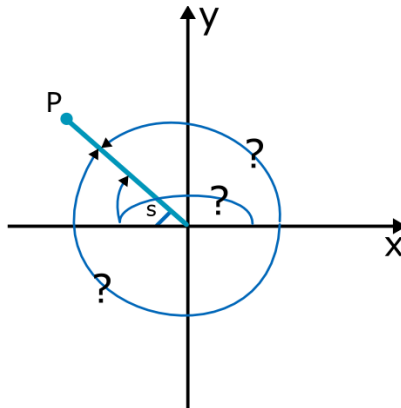


Figura 1: Problema da escolha do ângulo

Uma matriz de referencial possível é a que considera que para uma mesma abertura há 4 ângulos todos medidos em relação ao eixo horizontal (α , $-\alpha$, $\frac{1}{2}-\alpha$ e $-\frac{1}{2}+\alpha$, em voltas). A convenção usada é a de Euler para a rotação, não sendo, no entanto, graças às propriedades da abertura, definir especificamente entre que eixos esta é medida, sendo igual em qualquer um dos casos. Note-se que a base, devido a estas definições, também necessita de elementos extra

para permitir estas somas. Assim, dadas estas convenções, temos para a base e para a matriz de referencial:

$$B = \begin{bmatrix} S^{-1}(s_\alpha) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & S^{-1}(s_\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S^{-1}(s_\gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{Euler} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

q.e.d.

A.2.2 Conversão Polar

Prova da equação 10 A conversão polar para coordenadas Cartesianas é directa e está descrita em detalhe em [Wildberger]. Quanto às conversões entre ângulos de Euler e a convenção polar (R, θ, φ) , estas são facilmente calculáveis geometricamente (ver fig. 2). No caso da figura, φ é apresentado com as suas duas componentes em cada plano (φ_1 e φ_2) já que é uma abertura tridimensional.

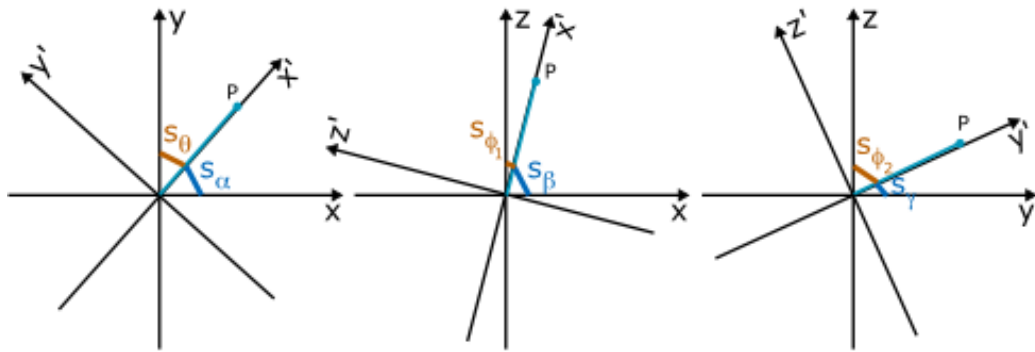


Figura 2: Convenção de Euler para a rotação, (x', y', z') após as três rotações

Assim, um ponto P que seja rodado s_θ, s_φ para P' terá como ângulos $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ cujos valores são:

$$\begin{aligned} s_\alpha &= 1 - s_\theta \\ s_\beta &= \frac{1}{1+s_\theta \frac{s_\varphi}{1-s_\varphi}} \\ s_\gamma &= \frac{1}{1+(1-s_\theta) \frac{s_\varphi}{1-s_\varphi}} \end{aligned}$$

Provas

s_α :

$$s_\alpha = \frac{q_x}{q_x+q_y}$$

$$s_\theta = \frac{q_y}{q_x+q_y} = 1 - \frac{q_x}{q_x+q_y} = 1 - s_\alpha$$

q.e.d.

s_β :

$$s_\beta = \frac{q_z}{q_x+q_z} = \frac{1}{1+\frac{q_x}{q_z}} = \frac{1}{1+\frac{s_\theta s_\varphi R}{(1-s_\varphi)R}} = \frac{1}{1+s_\theta \frac{s_\varphi}{1-s_\varphi}}$$

q.e.d.

s_γ :

$$s_\gamma = \frac{q_z}{q_y+q_z} = \frac{1}{1+\frac{q_y}{q_z}} = \frac{1}{1+\frac{(1-s_\theta)s_\varphi R}{(1-s_\varphi)R}} = \frac{1}{1+(1-s_\theta) \frac{s_\varphi}{1-s_\varphi}}$$

q.e.d.

B Exemplos de Aplicação

B.1 Robot tipo cobra (*hiper-redundante*)

Considere-se um robot bi-dimensional com n juntas com raios R_i , cada uma delas com possibilidade de rotação em θ (planar horizontal). Pretende-se obter P_f , o ponto terminal.

Matrizes de Referencial

$$R_{\text{cartesiano } 2D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\text{rot } 2D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes de Base

$$B_{\text{cartesiana } 2D} = \begin{bmatrix} \sqrt{q_x} & 0 \\ 0 & \sqrt{q_y} \end{bmatrix}$$

$$B_{\text{rot } 2D} = \begin{bmatrix} S^{-1}(s_\theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Referencial conjunto

$$R = [R_{\text{cartesiano } 2D} | R_{\text{rot } 2D}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Base conjunta

$$B = B_{\text{cartesiana } 2D} \oplus B_{\text{rot } 2D} = \begin{bmatrix} \sqrt{q_x} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q_y} & 0 \\ 0 & 0 & S^{-1}(s_\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assuma-se que os pontos têm L único, ou seja, apenas se vai trabalhar com uma solução e esta é obtida a partir dos sinais de x , y e a localização

de θ . Neste caso, $P_i^* = perm(P_i) = P_i$ (não há permutações a fazer). Os sinais ficam absolutamente determinados dentro da validade respectiva, o que permite generalizar a próxima equação para todas as trocas de sinais. Faça-se então a conta para o caso em que $L_i = [1000]$. Nesse caso:

$$P_f = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_f = \sum_{i=1}^n \sqrt{s_{\theta_i} R_i} \\ y_f = \sum_{i=1}^n \sqrt{(1 - s_{\theta_i}) R_i} \\ \theta_f = \sum_{i=1}^n \sqrt{S^{-1}(s_{\theta_i})} \end{cases}$$

Voltando a funções conhecidas (note-se que estas expressões só são válidas no contexto descrito e com $\sin^*(x) = \sqrt{\sin(x)^2}$ e $\cos^*(x) = \sqrt{\cos(x)^2}$):

$$\begin{cases} x_f = \sum_{i=1}^n \sin^*(\theta_i) \sqrt{R_i} \\ y_f = \sum_{i=1}^n \cos^*(\theta_i) \sqrt{R_i} \\ \theta_f = \sum_{i=1}^n \theta_i \end{cases}$$

Mais genericamente, como a única diferença entre as várias soluções são trocas de sinais podemos escrever:

$$\begin{cases} x_f = \sum_{i=1}^n s_{x_i} \sin^*(\theta_i) \sqrt{R_i} \\ y_f = \sum_{i=1}^n s_{y_i} \cos^*(\theta_i) \sqrt{R_i} \\ \theta_f = \sum_{i=1}^n s_{\theta_i} \theta_i \end{cases}$$

Em que s_i são os sinais correspondentes às trocas.

B.2 Manipulador paralelo

Referências

[Wildberger] Wildberger, N. J., "Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry", Wild Egg, 2005