PLANIFICAÇÃO FACTORIAL 2^k

A PROGRAMAÇÃO FACTORIAL É MUITO USADA EM EXPERIÊNCIAS QUE ENVOLVEM VÁRIOS FACTORES E ONDE É NECESSÁRIO ESTUDAR A INTERACÇÃO DESSES FACTORES NOS VALORES DA RESPOSTA.

A APLICAÇÃO MAIS IMPORTANTE É O TESTE DE **k FACTORES APENAS EM 2 NÍVEIS** (NORMALMENTE PARA OS VALORES MAIS BAIXO E MAIS ELEVADO) NESTE CASO ESTAMOS PERANTE A PLANIFICAÇÃO FACTORIAL 2^k.

O CASO MAIS SIMPLES É O 2^2, CONSIDERANDO COMO NÍVEIS “BAIXO” E “ALTO” PARA OS FACTORES **A** E **B**.

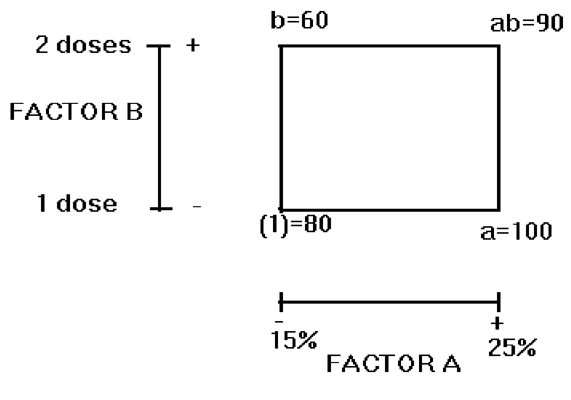
EXEMPLO F4

CONSIDEREMOS O ESTUDO DO EFEITO DA CONCENTRAÇÃO DE UM REAGENTE (FACTOR A COM OS NÍVEIS DE 15 % E 25 %) E DA QUANTIDADE DE CATALISADOR (FACTOR B COM FACTOR BAIXO - 1 DOSE E FACTOR ALTO - 2 DOSES) NO TEMPO DE REACÇÃO DUM PROCESSO QUÍMICO. EFECTUARAM-SE 3 EXPERIÊNCIAS PARA CADA CONJUNTO A/B, SENDO OS RESULTADOS OS SEGUINTES:

COMBINAÇÕES	ENSAIO	REPLICA 1	REPLICA 2	REPLICA 3	TOTAL
A baixo, B baixo	(1)	28	25	27	80
A alto, B baixo	a	36	32	32	100
A baixo, B alto	b	18	19	23	60
A alto, B alto	ab	31	30	29	90

EM PLANIFICAÇÃO FACTORIAL 2^k, "BAIXO" É REPRESENTADO POR "-" E "ALTO" POR "+". A COMBINAÇÃO DE "A alto; B baixo (+ -)" É REPRESENTADO POR a. A COMBINAÇÃO DE "A baixo; B alto (- +)" É REPRESENTADO POR b. ab REPRESENTA O CASO DE "os dois serem altos (++)" E (1) REPRESENTA O CASO DE "os dois serem baixos (--)".

EM ESQUEMA SERÁ:



ESTUDO DOS EFEITOS

PODEM ESTUDAR-SE OS EFEITOS DOS FACTORES **A** E **B** E DA INTERACÇÃO ENTRE A E B, **AB**:

$$A = \frac{1}{2\,p}\left\{[ab - b] + [a - (1)]\right\}$$

$$= 8.33$$

$$B = \frac{1}{2\,p}\left\{[ab - a] + [b - (1)]\right\}$$

$$= -5.00$$

$$AB = \frac{1}{2\,p}\left\{[ab - b] - [a - (1)]\right\}$$

$$=1.67$$

O EFEITO DO FACTOR A (CONCENTRAÇÃO DE REAGENTE) **É POSITIVO**, SUGERINDO QUE, **AUMENTANDO A** DE 15% (O NÍVEL -) PARA 25% (O NÍVEL +), **SE AUMENTA O RENDIMENTO DA REACÇÃO**.

O EFEITO DO FACTOR B (QUANTIDADE DE CATALISADOR) **É NEGATIVO**, SUGERINDO QUE **O AUMENTO DO FACTOR B** (QUANTIDADE DE CATALISADOR ADICIONADA AO PROCESSO) **DIMINUI O RENDIMENTO DA REACÇÃO**.

O EFEITO DE INTERACÇÃO A/B PARECE **SER PEQUENO** QUANDO COMPARADO COM OS DOIS EFEITOS PRINCIPAIS.

ANÁLISE DE VARIÂNCIA

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	SOMA DOS QUADRADOS	MÉDIAS QUADRÁTICAS	F_0
A	1	$SS_B = \frac{\left[ab + a - b - (1)\right]^2}{4\,p}$	$MQ_A = SS_A / 1$	$\frac{MQ_A}{MQ_R}$
B	1	$SS_B = \frac{\left[ab + b - a - (1)\right]^2}{4\,p}$	$MQ_B = SS_B / 1$	$\frac{MQ_B}{MQ_R}$
AB	1	$SS_{AB} = \frac{\left[ab + (1) - a - b\right]^2}{4\,p}$	$MQ_{AB} = SS_{AB} / 1$	$\frac{MQ_{AB}}{MQ_R}$
RESIDUAL	DIF.	$SS_R = SS_T - SS_A - SS_B - SS_{AB}$	$MQ_R = SS_R / DIF$	
TOTAL	4p-1	$SS_T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{p} x_{ijm}^2 - \frac{\left[\sum x_{ijm}\right]^2}{4\,p}$	$MQ_T = SS_{AB} / 4p-1$	

FONTE DE VARIAÇÃO	G. L.	SOMA DOS QUADRADOS	MÉDIAS QUADRÁTICAS	F_0
A	1	208.33	208.33	53.15
B	1	75.00	75.00	19.13
AB	1	8.33	8.33	2.13
RESIDUAL	8	31.34	3.92	
TOTAL	11	323.00		

AMBOS OS EFEITOS SÃO ESTATISTICAMENTE SIGNIFICATIVOS.

ALGORITMO DE YATES PARA PLANIFICAÇÃO 2^k

É UM MÉTODO SIMPLIFICADO DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE PLANIFICAÇÃO FACTORIAL

PARA O EXEMPLO ANTERIOR (PLANIFICAÇÃO 2^2):

ENSAIO	RESPOSTA	C3	C4	EFEITOS	VALOR DOS EFEITOS ($C(k+2) / p\ 2^{k-1}$)	SOMA DE QUADRADOS ($C(k+2) / p\ 2^k$)
(1)	80	180	$\sum x_i = 330$	T	55	$\bar{x} = 27.5$
a	100	150	50	A	8.33	208.3
b	60	20	-30	B	-5	75.0
ab	90	30	10	AB	1.67	8.33

1ª COLUNA - OS ENSAIOS POR ESTA ORDEM.

2ª COLUNA - RESPOSTAS - OS VALORES TOTAIS DOS ENSAIOS.

3ª COLUNA - C3 - 1ª METADE - SOMA DAS RESPOSTAS DE PARES ADJACENTES (180=80+100; 150=60+90).

- 2ª METADE - MUDA-SE O SINAL DO 1º VALOR DOS PARES DA RESPOSTA E ADICIONAM-SE OS VALORES DOS PARES ADJACENTES (20=-80+100; 30=-60+90).

4ª COLUNA - C4 (SÓ HÁ 4, PORQUE k=2) - EFECTUA-SE O MESMO TRATAMENTO EFECTUADO PARA A C1 EM RELAÇÃO À COLUNA RESPOSTA, MAS AGORA EM RELAÇÃO AOS VALORES DA COLUNA C1 (330=180+150; 50=20+30; -30=-180+150; 10=-20+30).

ALGORITMO DE YATES PARA PLANIFICAÇÃO 2^4

EXEMPLO F5

Efectuaram-se uma série de testes com produtos químicos em extintores em dois tecidos - factor A (A_0 - lã e A_1 - estamenha), usando dois métodos - factor B (B_0 - Px e B_1 - Py). Estes testes foram efectuados dependendo da lavagem - factor C (C_0 - antes de lavar e C_1 - depois de uma lavagem) e da orientação do teste - factor D (D_0 - vertical e D_1 - aleatória).

A variável resposta era a quantidade de tecido (cm^2) que ficava queimado depois de cada teste e obtiveram-se os seguintes resultados:

		A_0	A_0	A_1	A_1
		B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	D_0	4.2 [(1)]	4.5 (b)	3.1 (a)	2.9 (ab)
C_0	D_1	4.0 (d)	5.0 (bd)	3.0 (ad)	2.5 (abd)
C_1	D_0	3.9 (c)	4.6 (bc)	2.8 (ac)	3.2 (abc)
C_1	D_1	4.0 (cd)	5.0 (bcd)	2.5 (acd)	2.3 (abcd)

Ensaio	Resposta	C3	C4	C5	C6	Efeitos	Valor Efeitos	SS
(1)	4.2	7.3	14.7	29.2	57.5	T		3.59
a	3.1	7.4	14.5	28.3	-12.9	A	-1.61	-0.805
b	4.5	6.7	14.5	-5.2	2.5	B	0.31	0.155
ab	2.9	7.8	13.8	-7.7	-3.5	AB	-0.44	-0.22
c	3.9	7.0	-2.7	1.2	-0.9	C	-0.11	-0.055
ac	2.8	7.5	-2.5	1.3	-0.5	AC	-0.062	-0.031
bc	4.6	6.5	-3.5	-0.8	1.3	BC	0.16	0.08
abc	3.2	7.3	-4.2	-2.7	0.5	ABC	0.062	0.031
d	4.0	-1.1	0.1	-0.2	-0.9	D	-0.11	-0.055
ad	3.0	-1.6	1.1	-0.7	-2.5	AD	-0.31	-0.155
bd	5.0	-1.1	0.5	0.2	0.1	BD	0.012	0.006
abd	2.5	-1.4	0.8	0.7	-1.9	ABD	-0.24	-0.12
cd	4.0	-1.0	-0.5	1.0	-0.5	CD	-0.062	-0.031
acd	2.5	-2.5	-0.3	0.3	-0.9	ACD	-0.11	-0.055
bcd	5.0	-1.5	-1.5	0.2	-0.7	BCD	-0.088	-0.044
abcd	2.3	-2.7	-1.2	0.3	0.1	ABCD	0.012	0.006
total	57.5							

Análise dos resultados pelo método de Yates

1º Escolher a probabilidade

2º Se não houver dados sobre a variância dos erros experimentais, calcular a soma dos quadrados dos termos da coluna C(k+2) correspondente às interacções de 3 ou mais factores:

$$g_{ABC}^2 + g_{ABD}^2 + g_{ACD}^2 + g_{BCD}^2 + g_{ABCD}^2$$

$$=5.17$$

3º Para obter a variância s^2, dividir o somatório anterior por $\nu 2^k$, em que ν é o nº de termos do somatório

$$k=4;\ \nu=5 \qquad \nu 2^k=80$$

$$s^2 = 5.17 / 80 = 0.0646 \qquad s = 0.2542$$

No planeamento factorial 2^k, o nº de interacções de 3, 4, 5, ... ordens é dado por: $2^k - (k^2 + k + 2) / 2$. $(2^4 - (4 + 4 + 2) / 2 = 5)$.

4º Se existirem dados de variâncias sobre os erros experimentais, deve usar-se essa variância.

5º Obter o valor de (t)

6º Calcular: $w = \left(2^k\right)^{1/2}\ t\ s$

$$t_5^{95} = 2.571 \qquad s = 0.2542 \qquad w = 2.61$$

7º Comparar o valor $\left|g_x\right|$ com w.

Se $\left|g_x\right|$ > w conclui-se que o efeito X é significativo.

$\left|g_A\right| = 12.9$

$\left|g_{AB}\right| = 3.5$

o efeito A e a intersecção AB são significativos

QUANDO SE TESTAM TODAS AS HIPÓTESES EXPERIMENTAIS POSSÍVEIS, ESTAMOS PERANTE **A EXPERIMENTAÇÃO FACTORIAL TOTAL**. É O CASO DOS EXEMPLOS ACABADOS DE ESTUDAR.

NO ENTANTO, MUITAS VEZES NÃO É POSSÍVEL EXECUTAR TODOS ESSES ENSAIOS, PORQUE CONSOMEM MUITO TEMPO E DINHEIRO. POR EXEMPLO SE QUISÉSSEMOS TESTAR O EFEITO DE 7 FACTORES APENAS COM 2 NÍVEIS TERÍAMOS DE EFECTUAR $2^7 = 128$ TESTES OU $3^7 = 2187$ SE O ESTUDO INCIDISSE EM 3 NÍVEIS NESSE CASO USA-SE A CHAMADA **EXPERIMENTAÇÃO FACTORIAL PARCIAL**.

EXISTEM DOIS TIPOS DE PROCEDIMENTOS PARA EXECUTAR A EXPERIMENTAÇÃO FACTORIAL PARCIAL:

TESTES COM COMBINAÇÕES PRÉ-DETERMINADAS

TESTES COM COMBINAÇÕES OBTIDAS AO ACASO

TESTES COM COMBINAÇÕES PRÉ-DETERMINADAS

MÉTODO DE YATES

1º Construir uma tabela com (k + b) colunas em que:

k = nº de factores

b = 2 - experimentação factorial total

= 1 - experimentação factorial parcial de 1/2

= 0 - experimentação factorial parcial de 1/4

= -1 - experimentação factorial parcial de 1/8

Neste exemplo, a experimentação total conduziu a 16 ensaios. Pensemos agora na experimentação factorial parcial de 1/2 que necessita de 16/2=8 ensaios. Neste caso são: **(1), ad, bd, ab, cd, ac, bc, abcd.**

2º Nas colunas 1 e 2 colocam-se os ensaios por esta ordem e os valores das respostas.

Ensaio	Resposta	C3	C4	C5	efeitos	Valor Efeitos=(coluna (k+b))/2^{k-b-1}
(1)	4.2	7.2	15.1	28.8	T	7.2
ad	3.0	7.9	13.7	-6.8	A	-1.7
bd	5.0	6.8	-3.3	0.8	B	.2
ab	2.9	6.9	-3.5	-2.0	AB+CD	-0.5
cd	4.0	-1.2	0.7	-1.4	C	-0.35
ac	2.8	-2.1	0.1	-0.2	AC+BD	-0.05
bc	4.6	-1.2	-0.9	-0.6	BC+AD	-0.15
abcd	2.3	-2.3	-1.1	-0.2	D	-0.275
total	28.8					
SS	110.34			882.72		

3º Na coluna 3 executa-se como no método de Yates anterior: na primeira metade - soma de pares consecutivos: (7.2=4.2+3.0; etc) e na segunda metade - muda-se o sinal ao primeiro valor dos pares e depois somam-se: (-1.2=-4.2+3.0; etc.).

4º Nas coluna 4 e 5 procede-se como na coluna 3.

5º Acrescentar mais duas colunas. Na coluna [(n+b)+1] colocam-se os efeitos e na coluna [(n+b)+2] colocam-se os valores dos efeitos = $\frac{\text{coluna } (n+b)}{2^{n-b-1}}$

6º Escolher a probabilidade

7º Se não houver dados sobre a variância dos erros experimentais, calcular a soma dos quadrados dos termos da coluna C(k+2) correspondente às interacções de factores mistos:

$$g^2_{AB+CD} + g^2_{AC+BD} + g^2_{BC+AD}$$

$$=0.275$$

8º Para obter a variância s^2, dividir o somatório anterior por $\nu 2^{k-b}$, em que ν é o nº de termos do somatório

$$k=4;\ \nu=3;\ b=1 \qquad \nu 2^{k-b} = 24$$

$$s^2 = 0.275 / 24 = 0.0114583 \qquad s = 0.1070436$$

9º Se existirem dados de variâncias sobre os erros experimentais, deve usar-se essa variância.

10º Obter o valor de (t)

11º Calcular: $w = \left(2^{k-b}\right)^{1/2} t\, s$

$$t_3^{95} = 3.182 \qquad s = 0.1070 \qquad w = 0.963$$

12º Comparar o valor $|g_x|$ com w.

Se $|g_x| > w$ conclui-se que o efeito X é significativo.

Apenas o efeito A tem significado, porque $|-1.7| > 0.963$.